6. — Expression du ds^2 pour le champ de deux coups EN MOUVEMENT DONNÉ L'OPERATEUR $\frac{d_h}{dx^0}$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

A_4) *Pour chacun des deux corps le centre de gravité* P_h *n'est pas trop éloigné du (ou d'un) centre de gravitation* G_h; plus précisément, la distance $P_h G_h$ est assez petite pour que, en P_h, l'attraction g_h du corps C_h (nulle rigoureusement en G_h) soit une fraction assez petite (ici encore quelques centièmes au plus) de l'attraction F_h exercée par l'autre corps.

Alors il est permis de négliger, comme étant d'ordre supérieur au premier, tout terme du type

$$\beta^2 \frac{g_h}{F_h}, \qquad \gamma \frac{g_h}{F_h}, \text{ etc.} \qquad (h = 0,1) .$$

REMARQUE. — Il n'est pas inutile d'avertir que, à cause de A_3), dans l'ordre d'approximation adopté, il suffit que A_4) soit vérifiée à l'instant initial. Elle reste alors automatiquement satisfaite pour $t > 0$. En effet, d'après A_3), nos corps se comportent sensiblement comme des solides, et alors, à la même échelle, P_h et G_h gardent à tout instant les mêmes positions relatives dans le corps respectif. Il s'en suit en particulier que le centre de gravité P_h est substantiel, c'est-à-dire affecte toujours la même particule matérielle.

RÈGLE PRATIQUE. — En vue du calcul effectif, il y a lieu de retenir que, dans n'importe quelle relation, *l'évaluation des termes correctifs* (généralement d'ordre 1; ou, exceptionnellement, d'ordre $\nu + 1$, si par hasard l'ordre minimum est ν) *se fait comme si les corps* C_0, C_1 *étaient rigoureusement indéformables*, *animés*, *chacun pour son compte*, *de simple translation*, *et chacun exerçant une attraction nulle sur son centre de gravité.*

6. — EXPRESSION DU ds^2 POUR LE CHAMP DE DEUX CORPS EN MOUVEMENT DONNÉ — L'OPÉRATEUR $\frac{d_h}{dx^0}$.

Il faut expliciter les coefficients g_{ik}, qui, comme on l'a rappelé au numéro précédent, sont nécessairement de la forme

$$g_{ik} = \overset{0}{g}_{ik} - 2\gamma_{ik} \tag{15}$$

où les g_{ik}^0 sont les coefficients ($\pm$ 1, 0) de (14) et les γ_{ik} des petites corrections à regarder comme du premier ordre au plus.

Il est bien connu, et d'ailleurs aisé à vérifier, que, pour tenir compte, dans les équations du mouvement, des termes d'ordre immédiatement supérieur à l'approximation newtonienne, il suffit de calculer la partie prépondérante d'ordre minimum de tous les γ_{ik}, excepté γ_{00}, pour lequel il faut expliciter non seulement le premier ordre, mais aussi le second.

Nous désignerons par x_h^i ($h = 0, 1$; $i = 1, 2, 3$) les coordonnées des centres de gravité P_h; par $\beta_{h|i}$ les composantes $\frac{dx_h^i}{dx^0}$ de leurs vitesses römeriennes, qui ne sont pas autre chose que des vitesses ordinaires divisées par c; β_h représentera en conformité la valeur absolue de ladite vitesse vectorielle römerienne $\underline{\boldsymbol{\beta}_h}$.

D'autre part, V étant le potentiel newtonien des deux corps, rapporté, comme d'habitude, à l'unité de masse du point attiré, nous poserons

$$\frac{\mathrm{V}}{c^2} = \gamma \,. \tag{16}$$

Naturellement γ est la somme (divisée par c^2) de deux potentiels, l'un provenant de C_0 et l'autre de C_1. En envisageant en particulier les déterminations de γ aux points P_h, nous poserons

$$\gamma_{\mathrm{P}_h} = \gamma_h + \varpi_h \,, \tag{17}$$

où γ_h provient de l'autre corps C_{h+1}, et, d'après A_2) et (2), se réduit à

$$\gamma_h = \frac{1}{c^2 m_h}\mathrm{U} = \frac{f}{c^2}\frac{m_{h+1}}{r} \,, \tag{18}$$

tandis que, d'après (7),

$$\varpi_h = \frac{f}{c^2}\int_{\mathrm{C}_h}\frac{\mu' \, d\tau'}{r(\mathrm{P}_h, \mathrm{Q}')} \tag{19}$$

est le potentiel newtonien au point P_h du corps C_h lui-même, divisé par c^2.

Il importe de remarquer que ces ϖ_h jouent le rôle de *constantes*, puisqu'elles sont effectivement telles toutes les fois qu'on peut traiter comme invariables les corps C_h, ce qui arrive en particulier dans l'application de la règle pratique du numéro précédent.

L'intégration approchée des équations gravitationnelles, que je ne puis pas même ébaucher, donne, pour un point quelconque P,

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik}\gamma_P \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{20a}$$

où l'on entend par δ_{ik} les symboles de Kronecker, c'est-à-dire 1 pour $i = k$, 0 pour $i \neq k$.

Ensuite, en supposant que P appartient au corps C_h, et même qu'il coïncide initialement (en position et vitesse) avec le centre de gravité P_h, on constate, moyennant les hypothèses A_2), A_3) et la règle pratique qui en découle, que, dans tout terme d'ordre supérieur au premier, on peut confondre P avec P_h; et alors on trouve:

$$\gamma_{0i} = \gamma_{i0} = -2\varpi_h \beta_{h|i} - 2\gamma_h \beta_{h+1|i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{20b}$$

$$\gamma_{00} = \gamma_P + \theta_h\,, \tag{20c}$$

où γ_h, ϖ_h ont les significations (18), (19) et où θ_h est d'ordre 2. On a précisément

$$\theta_h = -\gamma_{P_h}^2 + \frac{fm_{h+1}}{2c^2}\frac{d_{h+1}^2 r}{dx^{0^2}} + \tag{21}$$

$$+ 2\gamma_0\gamma_1 + 2\varpi_h\beta_h^2 + 2\gamma_h\beta_{h+1}^2 + 2\gamma_h(\varpi_h + \eta_{h+1}) \qquad (h = 0,1)\,,$$

en indiquant pour abréger par η_h les constantes numériques que voici

$$\eta_h = \frac{f}{mc^2}\int_{C_h}\mu\, d\tau \int_{C_h}\frac{\mu'\, d\tau'}{r(Q, Q')}\,, \tag{22}$$

et par $\dfrac{d_h}{dx^0}$ *une dérivation temporelle dépendant exclusivement du mouvement du point* P_h, où l'on doit par conséquent regarder comme constant tout ce qui se rapporte à P_{h+1}.

Commençons maintenant à remplacer les g_{ik}, dans

$$ds^2 = \sum_{0\ ik}^{3} g_{ik}\, dx^i dx^k$$

par leurs valeurs (15). On a

$$ds^2 = ds_0^2 - 2\sum_{0\ ik}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i dx^k ,$$

d'où, si l'on tient compte des (20),

$$ds^2 = dx^{0^2}(1 - 2\gamma_{\mathrm{P}} - 2\,\theta_h) - (1 + 2\gamma_{\mathrm{P}}) \sum_{1\ i}^{3} dx^{i^2} +$$

$$+ 8\,dx^0 \sum_{1\ i}^{3} (\varpi_h\, \beta_{h|i} + \gamma_h\, \beta_{h+1|i})\, dx^i .$$

Divisons par dx^{0^2} et écrivons β^2 au lieu de

$$\sum_{1\ i}^{3} \left(\frac{dx^i}{dx^0}\right)^2 ,$$

en remarquant ici encore que, dans les termes d'ordre supérieur, on peut remplacer $\frac{dx^i}{dx^0}$ par $\beta_{h|i}$, et γ_{P} par γ_{P_h}. Il vient

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma_{\mathrm{P}}\right) - 2\gamma_{\mathrm{P}_h}\beta_h^2 + 8\,\varpi_h\beta_h^2 + 8\gamma_h\,\underline{\beta_0} \times \underline{\beta_1} - 2\,\theta_h .$$

Le terme en parenthèses est du premier ordre, les trois suivants du second ordre, et le signe $\times$ entre les deux vecteurs $\underline{\beta_0}$ et $\underline{\beta_1}$ signifie produit scalaire. On en tire, au troisième ordre près,

$$\frac{ds}{dx^0} = 1 - \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma_{\mathrm{P}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_{\mathrm{P}_h}\right)^2 -$$

$$- \gamma_{\mathrm{P}_h}\beta_h^2 + 4\,\varpi_h\beta_h^2 + 4\gamma_h\,\underline{\beta_0} \times \underline{\beta_1} - \theta_h , \qquad (23)$$

ce qui est, d'après (12), l'expression de la fonction lagrangienne définissant le mouvement du point $\mathrm{P} : \mathrm{P}_h$ peut y être traité comme identique à P. On peut, sans altérer les équations différentielles du mouvement, omettre la constante additive 1, et en surplus multiplier par une constante arbitraire $-\frac{1}{\xi_h}$, dont on disposera avantageusement un peu plus avant. Notre fonction lagrangienne sera donc

$$\mathcal{L}'_h = -\frac{1}{\xi_h}\left(\frac{ds}{dx^0} - 1\right)$$

ce qui, d'après (23), peut s'écrire

$$\xi_h \mathcal{L}'_h = \mathfrak{N}'_h + \Lambda'_h \,, \tag{24}$$

où, en envisageant spécifiquement le point P_h,

$$\mathfrak{N}'_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_{P_h} \tag{25}$$

constitue la partie prépondérante du premier ordre, tandis que

$$\Lambda'_h = \frac{1}{2}\mathfrak{N}'^2_h + \gamma_{P_h}\beta_h^2 - 4\varpi_h\beta_h^2 - 4\gamma_h \underline{\beta_0} \times \underline{\beta_1} + \theta_h \,, \tag{26}$$

comprenant, comme on le vérifie aisément, tous les autres termes, est du second ordre.

7. — Fonctions lagrangiennes définissant le mouvement des centres de gravité.

Le centre de gravité d'un corps donné est par sa définition un point fictif, dépendant de la distribution des masses dans le corps à l'instant envisagé. Il n'a pas par conséquent caractère nécessairement substantiel, c'est-à-dire qu'en général il n'adhère pas, pendant un mouvement du corps, à une particule matérielle bien déterminée. Ceci arrive parfois, notamment pour les corps solides et pour une classe de mouvements de systèmes continus remplissant une certaine condition (égalité de deux vecteurs à tout instant [1]); non en tout cas.

Ceci posé, reprenons les fonctions lagrangiennes $\mathcal{L}'_h (h = 0, 1)$ du

[1] Voir ma note: Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro, *Acta Pontificiae Academiae Scientiarum*, T. LXXXVIII, 1935, pp. 151-155.