IV. — La relation entre la théorie axiomatique des nombres et l'arithmétique intuitionniste.

aux conditions 1. — 4. indiquées tout à l'heure. Déjà le formalisme de la théorie axiomatique des nombres possède les dites propriétés. En effet on peut montrer que les définitions récurrentes se faisant d'après les schéma ($\mathcal{R}$) ont leur représentation dans ce formalisme; et quant aux autres conditions, il est évident qu'elles y sont remplies.

A fortiori nos suppositions se trouvent réalisées par les formalismes plus étendus, desquels la théorie axiomatique des nombres peut être déduite, comme celui de l'analyse infinitésimale, ceux de la théorie axiomatique des ensembles, et celui des « Principia Mathematica », soit dans la forme originaire (avec l'axiome de la réductibilité) ou dans la forme simplifiée.

Aucun de ces formalismes, pourvu qu'il soit non-contradictoire, ne permet de déduire le théorème arithmétique équivalent à l'affirmation métamathématique de sa non-contradiction.

En particulier, un raisonnement démontrant la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres ne peut pas être traduit dans cette théorie là.

Ce résultat explique le fait, qui nous a étonnés, que tous les essais de démontrer la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres par les méthodes élémentaires combinatoires n'ont pas réussi.

En effet, il faudrait, pour atteindre ce but, trouver un raisonnement élémentaire combinatoire qui ne puisse être formalisé dans la théorie axiomatique des nombres. Mais, à ce qu'il semble, il n'y a pas de tels raisonnements.

Selon toute apparence, le cadre dans lequel M. Hilbert enfermait les méthodes inspirées du « point de vue fini » n'est pas assez large pour une théorie de la démonstration. La question est donc de savoir si ce cadre peut être élargi sans abandon du but que poursuit la métamathématique. Nous verrons que c'est bien le cas.

IV. — La relation entre la théorie axiomatique des nombres et l'arithmétique intuitionniste.

Le théorème général de Gödel sur les démonstrations de non-contradiction s'applique en particulier, comme nous l'avons constaté, à la théorie axiomatique des nombres. Dénotons désormais, pour abréger, le formalisme de cette théorie par $\mathfrak{N}$.

Nous avons obtenu le résultat que le théorème arithmétique, dans lequel l'énoncé de la non-contradiction de $\mathfrak{N}$ est traduit au moyen d'une numérotation des symboles et variables de $\mathfrak{N}$, puis des expressions et encore des suites d'expressions de $\mathfrak{N}$, ne peut être déduit par le formalisme $\mathfrak{N}$.

D'autre part, nous sommes conduits, par diverses épreuves faites, à croire que chaque démonstration d'un théorème arithmétique suffisant aux exigences du point de vue fini (comme il a été caractérisé par M. Hilbert) peut être formalisée dans $\mathfrak{N}$.

Donc en maintenant ces exigences pour la méthode de la métamathématique, on ne parviendra pas à démontrer la non-contradiction de $\mathfrak{N}$.

Ainsi nous sommes amenés à nous demander s'il n'y a pas la possibilité d'élargir le « point de vue fini », tout en conservant le but de la métamathématique.

Rappelons-nous comment M. Hilbert lui-même a introduit ce point de vue. Dans l'exposition des idées fondamentales de la métamathématique, il présente la théorie élémentaire et intuitive des nombres comme une méthode qui possède une pleine sûreté, qui n'exige pas de suppositions ni d'axiomes, et qui est libre des difficultés attachées à la notion de l'infini.

De la même manière il tend à faire les raisonnements métamathématiques. Et la possibilité de s'en tenir à un tel cadre lui semble être garantie par le fait que le problème de démontrer la non-contradiction d'un formalisme rigoureux a la forme d'un problème élémentaire concernant les nombres entiers.

Ainsi l'introduction du point de vue fini, faite par M. Hilbert, consistait simplement à caractériser, au moyen d'un exemple, une méthode satisfaisante pour la métamathématique. Mais ce n'est pas une délimitation précise. Et il y avait en effet une incertitude sur l'étendue des méthodes finies.

Quelques mathématiciens, notamment MM. v. Neumann, Kalmár et Herbrand, ont envisagé le point de vue fini comme non différent de la méthode intuitionniste de M. Brouwer. Ce qui était en faveur de cette interprétation c'est que les restrictions faites par la méthode intuitionniste sont justement celles qui sont nécessaires pour la métamathématique; car cette méthode est pleinement caractérisée par l'exigence d'éviter les suppositions reposant sur les analogies de l'infini au fini, en particulier celle de la totalité des nombres entiers.

Toutefois, dans les démonstrations métamathématiques, on s'en est toujours tenu à un cadre plus étroit en raison de la tendance naturelle à une évidence élémentaire. On est resté dans le domaine de ces raisonnements qui peuvent être formalisés sans l'emploi de variables liées.

C'est par cette limitation qu'on est tombé dans les dites difficultés. En effet, notre thèse qu'on peut formaliser dans $\mathfrak{N}$ chaque démonstration d'un théorème arithmétique, laquelle est conforme au point de vue fini, n'est valable que si le point de vue fini est interprété dans le sens restreint.

Nous allons voir qu'il y a des démonstrations intuitionnistes qui ne peuvent pas être formalisées dans $\mathfrak{N}$. Pour la recherche d'une telle démonstration faisons d'abord la réflexion suivante.

Comme nous le savons par le théorème de Gödel, la formule exprimant, dans le formalisme $\mathfrak{N}$, la non-contradiction de $\mathfrak{N}$ n'est pas déductible dans $\mathfrak{N}$. Mais il se trouve qu'elle est déductible à l'aide d'un formalisme $\mathfrak{N}^*$ qu'on obtient de $\mathfrak{N}$ en ajoutant certaines définitions récurrentes non-élémentaires, comme par exemple

$$\Psi(k, 0) \rightleftarrows \mathfrak{B}(k)$$

$$\Psi(k, n+1) \rightleftarrows (\mathrm{E}x)(\Psi(x, n) \ \& \ \mathfrak{B}(k, x, n)) ,$$

où $\Psi(k, n)$ est la fonction propositionnelle qu'il s'agit de définir, et $\mathfrak{B}(k)$, $\mathfrak{B}(k, x, n)$ sont des expressions connues [1].

De là découle que cette sorte de définitions récurrentes dépasse le formalisme $\mathfrak{N}$. D'autre part, une telle définition récurrente intervient aussi dans la déduction formelle du principe de l'induction transfinie appliqué à un ordre du type ordinal $\lim\limits_{n} \alpha_n$, où

$$\alpha_0 = 1 , \quad \alpha_{k+1} = \omega^{\alpha_k} (k = 0, 1, \ldots) .$$

[1] Qu'il y ait ici des équivalences récurrentes au lieu d'équations récurrentes, ce n'est pas un point essentiel. Généralement les équations récurrentes peuvent être remplacées par des équivalences récurrentes. Inversement, on pourrait ici, en introduisant le symbole $\iota_x \mathfrak{A} x$, réduire les équivalences récurrentes définissant $\Psi(k, n)$, à des équations récurrentes définissant une fonction arithmétique de k et n.

Ce type d'ordre peut être réalisé pour les nombres entiers par un ordre

$$a \prec b$$

définissable par des récurrences élémentaires. Et le dit principe s'exprime, pour cet ordre, par la formule

$$(x) \{ (y) (y \prec x \longrightarrow \mathrm{A}(y)) \longrightarrow \mathrm{A}(x) \} \longrightarrow (x)\,\mathrm{A}(x) ,$$

dans laquelle on peut substituer pour A (.) une formule $\mathfrak{A}$ (.) quelconque du formalisme $\mathfrak{N}$ contenant une place d'argument.

Pour déduire cette formule, il suffit d'employer, outre les règles du formalisme $\mathfrak{N}$, une définition récurrente de la forme indiquée tantôt. A ce qu'il semble, une telle définition ne peut pas être évitée ici, à moins qu'on étende le symbolisme de $\mathfrak{N}$, par exemple en introduisant des variables liées de propositions, c'est-à-dire en s'élevant au formalisme logique du deuxième ordre.

Mais, d'autre part, on peut démontrer le principe représenté par cette formule dans la mathématique intuitionniste.

Donc, selon toute apparence, le cas spécial considéré du principe de l'induction transfinie est déjà un exemple d'un théorème démontrable par la mathématique intuitionniste, mais pas déductible dans $\mathfrak{N}$.

Ainsi il se pourrait, en concordance avec le théorème de Gödel, qu'on trouve une démonstration intuitionniste de la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{N}$, dans laquelle la seule partie non-formalisable dans $\mathfrak{N}$ serait l'application du dit principe d'induction transfinie.

Pour le moment ce n'est qu'une possibilité. Mais d'une autre manière on a réussi à démontrer du point de vue intuitionniste la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{N}$.

Cette démonstration repose sur une généralisation d'une remarque faite par M. Glivenko. Il a comparé le calcul ordinaire des propositions à un calcul conforme à la logique intuitionniste des propositions, et il a constaté la relation suivante: si une formule $\mathfrak{A}$ est déductible par le calcul ordinaire des propositions, alors $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ est déductible par le calcul intuitionniste; et si

$\overline{\mathfrak{A}}$ est déductible par le calcul ordinaire, alors elle est aussi déductible par le calcul intuitionniste.

Si cet énoncé pouvait être étendu directement au calcul entier, alors la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{N}$ résulterait immédiatement du point de vue intuitionniste. Cependant la thèse de Glivenko n'est plus valable, quand les formes de la généralité et de l'existence se joignent.

Mais il suffit de modifier un peu l'affirmation de Glivenko pour qu'elle puisse être étendue à toute l'arithmétique intuitionniste, telle qu'elle a été formalisée par M. Heyting. En effet, M. Gentzen a démontré l'énoncé suivant: Soit $\mathfrak{A}$ une formule déductible par le formalisme $\mathfrak{N}$; soit de plus $\mathfrak{A}^*$ la formule que nous obtenons de $\mathfrak{A}$ en appliquant la double négation à chaque partie de la composition logique de $\mathfrak{A}$ et aussi à la formule $\mathfrak{A}$ elle-même; alors $\mathfrak{A}^*$ est déductible par le calcul intuitionniste de M. Heyting.

De là suit aisément qu'une contradiction se trouvant dans le formalisme $\mathfrak{N}$ devrait entraîner une contradiction dans la mathématique intuitionniste. Car s'il y avait une formule $\mathfrak{A}$ telle que $\mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{A}}$ seraient déductibles dans $\mathfrak{N}$, alors, d'après l'énoncé formulé tantôt, $\mathfrak{A}^*$ et $(\overline{\mathfrak{A}})^*$ seraient déductibles par le formalisme de Heyting. Mais $(\overline{\mathfrak{A}})^*$ c'est $\overline{\overline{\overline{\mathfrak{A}^*}}}$, et de $\overline{\overline{\overline{\mathfrak{A}^*}}}$ on déduit $\overline{\mathfrak{A}^*}$ dans le calcul de Heyting. Donc il y aurait une contradiction aussi dans le calcul intuitionniste.

En regardant la démonstration de M. Gentzen, on remarque qu'on n'a pas besoin de tant de négations. Par une modification éliminant les doubles négations on parvient au résultat suivant, trouvé déjà un peu plus tôt par M. Gödel:

Etant donnée, dans le formalisme $\mathfrak{N}$, une déduction d'une formule $\mathfrak{A}$ ne contenant:

1° aucune variable de proposition,
2° aucune disjonction $\vee$,
3° aucun signe d'existence (Ex),

on peut en tirer une déduction de $\mathfrak{A}$ par le calcul intuitionniste.

En effet sous les conditions faites on peut d'abord éliminer du tout les variables de propositions, les disjonctions et les signes d'existence de la déduction donnée. Cela se fait:

a) en remettant les substitutions aux formules initiales,

b) en remplaçant chaque expression $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ par $\overline{\overline{\mathfrak{B}} \;\&\; \overline{\mathfrak{C}}}$,

c) en remplaçant chaque expression $(\mathrm{Ex})\, \mathfrak{B}(x)$ par $\overline{(x)\, \overline{\mathfrak{B}(x)}}$.

Or le formalisme $\mathfrak{N}$ ne dépasse le formalisme de Heyting que par la formule logique

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}} \longrightarrow \mathrm{A}\,.$$

Cette formule a été remplacée par les opérations *a*), *b*), *c*), à chaque place où elle intervient dans la déduction donnée, par une formule $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \longrightarrow \mathfrak{A}$, ne contenant ni des variables de propositions ni les symboles $\vee$, (Ex). Dans chacune de ces formules, $\mathfrak{A}$ est composé d'équations élémentaires au moyen des opérations &, $\longrightarrow$, $\overline{}$, (x). Mais pour une formule $\mathfrak{A}$ composée ainsi on peut déduire

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

dans le calcul intuitionniste.

En effet, on a d'abord

$$\overline{\overline{a = b}} \longrightarrow a = b\,,$$

et généralement

$$\overline{\overline{\overline{\mathfrak{B}}}} \longrightarrow \overline{\mathfrak{B}}\,;$$

de plus, si on a deux formules

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \longrightarrow \mathfrak{B}\,, \quad \overline{\overline{\mathfrak{C}}} \longrightarrow \mathfrak{C}\,,$$

on en déduit

$$\overline{\overline{\mathfrak{B} \;\&\; \mathfrak{C}}} \longrightarrow \mathfrak{B} \;\&\; \mathfrak{C}\,, \quad \overline{\overline{\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}}} \longrightarrow (\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C})\,;$$

et d'une formule

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}(a)}} \longrightarrow \mathfrak{B}(a)$$

on déduit

$$\overline{\overline{(x)\, \mathfrak{B}(x)}} \longrightarrow (x)\, \mathfrak{B}(x)\,.$$

Ces déductions se font au moyen des relations

$$\mathfrak{B} \longrightarrow \overline{\overline{\mathfrak{B}}}\,, \quad (\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}) \longrightarrow (\overline{\mathfrak{C}} \longrightarrow \overline{\mathfrak{B}})\,,$$

qui sont généralement valables dans la logique intuitionniste.

Nous parvenons donc à une déduction de $\mathfrak{A}$ par le calcul intuitionniste.

A ce résultat nous pouvons donner encore une autre forme. Observons qu'à chaque formule $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{N}$, ne contenant pas des variables de propositions, il correspond une formule $\mathfrak{A}'$ qu'on obtient de $\mathfrak{A}$ en remplaçant chaque partie de la forme $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ par $\overline{\overline{\mathfrak{B}} \,\&\, \overline{\mathfrak{C}}}$ et chaque partie de la forme (Ex) $\mathfrak{B}(x)$ par $\overline{(x)\,\overline{\mathfrak{B}}\,(x)}$.

Cette formule $\mathfrak{A}'$ est équivalente à la formule $\mathfrak{A}$ dans la théorie axiomatique des nombres, puisqu'on peut déduire dans $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{A}\,.$$

D'autre part, $\mathfrak{A}'$ satisfait aux suppositions du théorème démontré tantôt; et de là découle que si cette formule est déductible dans $\mathfrak{N}$, elle est aussi déductible par le calcul intuitionniste.

Par conséquent si une formule $\mathfrak{A}$, ne contenant pas de variables de propositions, est déductible dans le formalisme $\mathfrak{N}$, alors la formule correspondante $\mathfrak{A}'$ est déductible par le calcul intuitionniste.

On peut donc dire que le passage de la théorie axiomatique des nombres à une partie de la mathématique intuitionniste se fait par un simple changement de l'interprétation des propositions.

En particulier, la non-contradiction de l'intuitionnisme entraîne celle de la théorie axiomatique des nombres.

Ainsi le problème de démontrer la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres, qui n'a pas de solution formelle dans le cadre du formalisme $\mathfrak{N}$ même et qui dépasse, à ce qu'il semble, les forces des méthodes élémentaires combinatoires, admet une solution assez simple, si on étend les méthodes de la métamathématique en adjoignant certains raisonnements intuitionnistes.

Il est vrai qu'il y a peu d'espérance que la forme de la solution trouvée puisse être généralisée de façon qu'on en tire une démonstration de la non-contradiction de l'analyse infinitésimale. Mais outre la méthode spéciale, par laquelle la non-contradiction du formalisme $\mathfrak{N}$ a été démontrée, il y a encore, comme les considérations précédentes nous le montrent, d'autres possibilités de faire valoir le point de vue élargi de la métamathématique.

Je me permets d'exprimer ma reconnaissance à M. le Prof. Wavre et M. le Prof. Gonseth de l'aimable aide qu'ils ont bien voulu me prêter quant à l'amélioration du texte de cet article.

SUR LA NATURE DE LA LOGIQUE, DE SES CATÉGORIES ET DE SES VÉRITÉS [1]

PAR

Paul HERTZ.

Quelle est la nature de la logique, de ses catégories et de ses vérités ?

Il ne faut pas croire que les lois de la logique sont surtout des lois psychologiques de la pensée. Elles sont aussi des « lois » au sens originaire du mot, des *normes* qui prescrivent comment ont doit penser, pour être sûr d'arriver à des résultats vérifiés par la réalité des choses. Mais de tels précepts seraient impossibles s'il n'y avait pas de *liaisons objectives* qui y correspondent.

[1] Résumé de la communication présentée le 22 juin 1934 dans la série des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève. Une publication plus complète paraîtra en allemand dans les *Abhandlungen der Fries'ischen Schule, Neue Folge*, 6. Band, 2. Heft, Berlin. — Les pensées développées dans la dernière partie de cette conférence sont contenues dans la Note parue dans *Vom Wesen der logischen Erkenntnis*, t. II, 1932, p. 369.