II. — Sur les équations: $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}+Y\frac{\delta z}{\delta x} = 0$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

II. — Sur les équations:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + Y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

5. — Montrons d'abord comment on pourra former une solution particulière de cette équation. Cherchons une solution z_1 de la forme $\lambda(x)\ \mu(y)$.

On devra avoir

$$\lambda\mu'' + Y\mu\lambda' = 0 ,$$

ce qui se scinde en les deux équations

$$\lambda' + \alpha\lambda = 0 ,$$

$$\mu'' - \alpha Y\mu = 0 .$$

La première donne $\lambda = e^{-\alpha x}$.

La seconde est une équation linéaire du second ordre qui a donné lieu à de nombreux et importants travaux, principalement de la part de M. E. Picard. Son étude a fait dernièrement l'objet d'un problème d'Agrégation (1926 — voir: *Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1927).

G. Darboux (*Surfaces*, t. II, p. 210) a signalé de curieuses propriétés de cette équation.

Rappelons qu'en posant $\mu = e^{\int u dy}$, u désignant la nouvelle fonction inconnue, cette équation s'écrit

$$u' + u^2 - \alpha Y = 0 ,$$

ce qui est une équation de Riccati.

Nous connaîtrons donc une solution particulière de l'équation aux dérivées partielles considérée si nous connaissons une solution particulière de cette équation de Riccati. On sait d'ailleurs que la connaissance d'une solution particulière d'une équation de Riccati entraîne celle de son intégrale générale qu'on obtient par des quadratures.

Ceci nous permet de justifier l'intérêt que l'on peut attacher à la question suivante:

Quelle est la condition pour qu'une équation de la forme (1′)

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

puisse être ramenée à une équation de même forme, mais dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit fonction de la seule variable y ?

C'est ce que je me propose de chercher maintenant.

6. — Nous voulons que l'équation (1′) puisse être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{1}{Y_1^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

par le changement de variables $x = x$, $y_1 = \mu(x, y)$, Y_1 désignant une fonction de y_1 seulement.

Ce changement de variables nous conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{1}{\mu_y^2}(\mu_{yy} + f\mu_x)\frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{f}{\mu_y^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 ,$$

qui, si y_1 est une solution de (1′), se réduit à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{f}{\mu_y^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 . \tag{11}$$

Posons $\frac{f}{\mu_y^2} = \frac{1}{Y_1^2}$. On tire de là

$$\mu_y = q = f^{\frac{1}{2}} Y_1 . \tag{12}$$

On en déduit

$$\mu_{yy} = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f_y Y_1 + f^{\frac{1}{2}} Y_1' q ,$$

et, comme $\mu(x, y)$ vérifie l'équation (1′),

$$\mu_x = p = -\frac{1}{2} f^{-\frac{3}{2}} f_y Y_1 - Y_1 Y_1' . \tag{13}$$

Ecrivons que la condition d'intégrabilité est satisfaite

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} .$$

Ceci donne, toutes simplifications faites,

$$f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = - Y_1'' Y_1 = f \cdot \mathrm{de}\ y_1 . \tag{14}$$

On peut écrire (14) sous la forme

$$y_1 = \Phi(\lambda) \tag{15}$$

en posant

$$\lambda = f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) . \tag{16}$$

Donc pour savoir si l'équation (1′) est réductible à la forme (10) on commencera par calculer la fonction λ de x et y donnée par la formule (16) puis on cherchera si (1′) admet une solution qui soit fonction de λ. Comme on a

$$\frac{\partial y_1}{\partial y} = \Phi' \frac{\partial \lambda}{\partial y} , \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial y^2} = \Phi'' \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \Phi' \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} , \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = \Phi' \frac{\partial \lambda}{\partial x} ,$$

il faut donc que

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 \Phi'' + \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + f \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) \Phi' = 0 ,$$

ou encore

$$\Phi'' + \frac{Z(\lambda)}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2} \Phi' = 0 . \tag{17}$$

Si l'on pose

$$\Lambda = \frac{Z(\lambda)}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2} , \tag{18}$$

il faudra donc que Λ puisse s'exprimer en fonction de λ. L'équation (17), que l'on peut écrire

$$\Phi'' + \Lambda \Phi' = 0 ,$$

donne alors

$$\Phi = \int e^{-\int \Lambda d\lambda} d\lambda . \tag{19}$$

On peut résumer les résultats que nous venons d'obtenir de la façon suivante:

Si l'on veut ramener une équation de la forme

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{1'}$$

à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{1}{Y_1^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 , \tag{10}$$

dans laquelle Y_1 *est fonction de* y_1 *seul, on commencera par calculer l'expression*

$$\lambda = f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right),$$

puis l'expression

$$\Lambda = \lambda_y^{-2} Z(\lambda) .$$

Si cette dernière peut s'exprimer en fonction de λ *on déterminera* y_1 *par la formule*

$$y_1 = \int e^{-\int \Lambda d\lambda} d\lambda .$$

La substitution de y_1 *à* y *conduira à la forme désirée* (10) *pour l'équation* (1').

7. — *Cas particuliers.*

a) Reprenons l'équation (14) et supposons $Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$. Donc $f^{-\frac{1}{2}}$ est solution de l'équation (1') considérée. Alors dans (14) le second membre doit être nul, $Y_1'' = 0$, $Y_1 = y_1$ et l'équation (10) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{1}{y_1^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 . \tag{10'}$$

On sait ramener l'équation (10') à celle de la Chaleur. Le Théorème I de la première partie s'applique dans le cas actuel.

b) Un autre cas important est celui où

$$\lambda = f^{-\frac{1}{2}} Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = k ,$$

k étant une constante.

Alors (14) donne

$$Y_1'' Y_1 + k = 0 .$$

Si l'on pose $Y_1 = \sqrt{Y_2}$, ceci peut s'écrire

$$Y_2'^2 - 2 Y_2 Y_2'' - 2k Y_2 = 0 .$$

En se reportant à notre étude déjà citée (2me partie, 2me application), on constatera que l'équation ci-dessus exprime la condition pour que l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{Y_2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

puisse être ramenée à l'équation de la Chaleur.

En effet, dans ce cas comme dans le précédent, nous nous trouvons dans les conditions d'application du théorème I.

c) Supposons $Z(\lambda) = 0$. Alors $\Lambda = 0$, $y_1 = \lambda$. Par suite on aura la fonction Y_1, qui doit figurer dans l'équation (10) à obtenir, par l'équation

$$Y_1'' Y_1 + y_1 = 0$$

déduite de (14).

D'une façon plus générale supposons qu'on ait

$$\Lambda = -\frac{m}{\lambda} ,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\lambda Z(\lambda) + m\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 = 0 .$$

On établira aisément la formule suivante qui se démontre par récurrence

$$Z(\lambda^{m+1}) = (m+1)\lambda^{m-1}\left[\lambda Z(\lambda) + m\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2\right] .$$

Il en résulte que

$$\Lambda = -\frac{m}{\lambda} \quad \text{entraîne} \quad Z(\lambda^{m+1}) = 0 ;$$

donc ici

$$y_1 = \lambda^{m+1}$$

et on aura ensuite la fonction Y_1, toujours d'après (14) par:

$$Y_1'' Y_1 + y_1^{\frac{1}{m+1}} = 0 .$$

8. — *Exemple.* — Considérons l'équation

$$Z(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{a^2(y + a^2x)} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Cette équation a été étudiée par M. A. Buhl dans son travail *Sur les Equations linéaires aux dérivées partielles et la Théorie des groupes continus* (*Journal de Mathématiques*, t. 10, 1904, p. 85) sous la forme

$$\mu^2(y - \mu^2 x) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

Il suffit de poser $\mu = ai$ pour passer de l'une à l'autre. Ici

$$f(x, y) = a^{-2}(y + a^2x)^{-1} ,$$

$$f^{-\frac{1}{2}} = a(y + a^2x)^{\frac{1}{2}} , \qquad Z\left(f^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{a}{4}(y + a^2x)^{-\frac{3}{2}} ,$$

$$\lambda = \frac{a^2}{4}(y + a^2x)^{-1} , \qquad Z(\lambda) = \frac{a^2}{4}(y + a^2x)^{-3} ,$$

$$\lambda_y = -\frac{a^2}{4}(y + a^2x)^{-2} ,$$

$$\Lambda = \frac{Z(\lambda)}{\lambda_y^2} = \frac{4}{a^2}(y + a^2x) = \frac{1}{\lambda} .$$

On a finalement, à un facteur constant près,

$$y_1 = \log(y + a^2x) .$$

Puis le changement de variables

$$x = x , \qquad y_1 = \log(y + a^2x)$$

remplace cette équation par

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{e^{y_1}}{a^2} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$