# SUR LES ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES
## $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \,, \quad x^3 + y^3 + z^3 = t^3 \,.$

PAR

F.-J. Duarte (Genève).

---

1. — On peut trouver aisément les formules donnant les solutions entières des équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \tag{1}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3 \tag{2}$$

en se servant d'une méthode analogue à celle que nous avons employée pour trouver les solutions irrationnelles de $x^n + y^n = z^n$ pour des valeurs particulières de $n$ [1].

En effet, au moyen des substitutions

$$\left\{\begin{aligned} x + y + z - t &= 2\theta \\ x - y - z + t &= 2\alpha \\ -x + y - z + t &= 2\beta \\ -x - y + z + t &= 2\gamma \,, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

on peut mettre les équations (1) et (2) sous les formes

$$(\theta + \alpha)^2 + (\theta + \beta)^2 + (\theta + \gamma)^2 = (\theta + \alpha + \beta + \gamma)^2 \,, \tag{4}$$

$$(\theta + \alpha)^3 + (\theta + \beta)^3 + (\theta + \gamma)^3 = (\theta + \alpha + \beta + \gamma)^3 \,. \tag{5}$$

ou bien, en développant

$$\theta^2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \,, \tag{6}$$

$$2\theta^3 = 6\theta\,(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + 3(\alpha + \beta)\,(\alpha + \gamma)\,(\beta + \gamma) \,. \tag{7}$$

---

[1] *Sur les solutions irrationnelles et complexes ~~de~~ l'équation* $x^n + y^n = z^n$. Genève, 1933.

Ainsi, la résolution des équations (1) et (2) revient à celle des équations (6) et (7), respectivement. Une fois trouvées les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\theta$ vérifiant ces dernières équations, on aura celles des indéterminées $x$, $y$, $z$, $t$ par les formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= \theta + \alpha \, , \\ y &= \theta + \beta \, , \\ z &= \theta + \gamma \, , \\ t &= \theta + \alpha + \beta + \gamma \, . \end{aligned}\right. \tag{8}$$

2. — Considérons d'abord l'équation (6); il suffit de donner des valeurs entières arbitraires aux paramètres $\theta$, $\alpha$, $\beta$ et alors le quatrième paramètre $\gamma$ sera déterminé rationnellement. Les formules (8) donneront donc des valeurs rationnelles et les solutions entières s'en déduisent immédiatement. Il est facile de constater qu'on obtient ainsi la solution générale.

Mais il est préférable de procéder de la façon suivante: écrivons l'équation (6) sous la forme

$$\theta^2 = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma) - \beta^2$$

et alors, en tenant compte de l'identité bien connue

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (bc - ad)^2 = (ac + bd)^2 \, ,$$

on pourra poser

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= a^2 + b^2 \, , \\ \beta + \gamma &= c^2 + d^2 \, , \\ \beta &= bc - ad \, , \\ \theta &= ac + bd \, . \end{aligned}$$

On sera donc certain d'obtenir des solutions entières de l'équation (1) si, dans les formules (8) on donne aux paramètres les valeurs suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} \theta &= ac + bd \\ \alpha &= a^2 + b^2 + ad - bc \\ \beta &= bc - ad \\ \gamma &= c^2 + d^2 + ad - bc \, , \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$a$, $b$, $c$, $d$ désignant des entiers arbitraires.

Nous allons montrer maintenant que les formules (8) et (9) fournissent la solution générale de l'équation (1), c'est-à-dire que si l'on donne un système de quatre entiers $x$, $y$, $z$, $t$ satisfaisant cette équation, il est possible de trouver quatre entiers $a$, $b$, $c$, $d$ permettant de reproduire au moyen de ces formules, les valeurs données de $x$, $y$, $z$, $t$ multipliées par un facteur constant différent de zéro. Soient, en effet, $x$, $y$, $z$, $t$ quatre entiers vérifiant l'équation (1). Les équations (3) déterminent quatre entiers $\theta$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ qui, d'après cette hypothèse, vérifieront identiquement l'équation (6). Or, de la première et la troisième des formules (9) on tire

$$c = \frac{\theta a + \beta b}{\alpha + \beta} \;, \qquad d = \frac{\theta b - \beta a}{\alpha + \beta} \;,$$

car $\alpha + \beta \neq 0$, à moins que $z = t$, cas qui correspond à une solution banale ($x = y = 0$).

Si l'on prend

$$a = b = \alpha + \beta \;, \tag{10}$$

on aura:

$$\left\{ \begin{aligned} c &= \theta + \beta \;, \\ d &= \theta - \beta \;, \end{aligned} \right. \tag{11}$$

et si l'on substitue les valeurs (10) et (11) dans les formules (9), on constate que l'on reproduit les valeurs $\theta$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ correspondantes à la solution donnée multipliées par le facteur constant différent de zéro $2(\alpha + \beta)$. Les formules (8) reproduisent donc les valeurs données de $x$, $y$, $z$, $t$ multipliées par le même facteur. C.Q.F.D.

3. — Pour obtenir la forme classique [1] des formules de résolution de l'équation (1), il suffit de faire dans les formules (9)

$$a = q - n \;, \quad b = m - p \;, \quad c = n - p \;, \quad d = n + p \;.$$

On obtient, en effet

$$\left\{ \begin{aligned} x &= m^2 - n^2 - p^2 + q^2 \;, \\ y &= 2mn - 2pq \;, \\ z &= 2mp + 2nq \;, \\ t &= m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \;. \end{aligned} \right. \tag{12}$$

[1] V. Carmichael, *Analyse indéterminée*, trad. Sallin. Paris, 1929, p. 40.

M. Cahen, dans sa *Théorie des Nombres*, t. II, Paris, 1924, p. 597, donne la solution générale de l'équation (1) au moyen de formules à trois paramètres, en cherchant les points à coordonnées rationnelles de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 .$$

Ces formules se déduisent aussi aisément des (8) et (9), en donnant aux paramètres les valeurs suivantes

$$a = w - u , \quad b = v , \quad c = v - w , \quad d = u ,$$

et il en résulte

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 2vw , \\ y &= u^2 + v^2 - w^2 , \\ z &= 2uw , \\ t &= u^2 + v^2 + w^2 . \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Dans toutes ces formules on obtiendra les solutions primitives en débarrassant les valeurs de $x$, $y$, $z$, $t$ de leur plus grand commun diviseur.

4. — Revenons maintenant à l'équation (2) mise sous la forme (7). On remarquera, d'après cette équation, que l'une au moins des quantités $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ a des diviseurs communs avec $\theta$, en particulier, le diviseur 3; supposons que ce soit $\alpha + \gamma$ et mettons l'équation (7) sous la forme

$$2\theta(\theta^2 + 3\beta^2) = 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma + 2\theta) . \tag{14}$$

Cette équation étant homogène, on peut remplacer les paramètres $\theta$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, par leurs valeurs multipliées par un facteur constant arbitraire $\lambda$. Faisons un changement de notation, en posant

$$\left\{ \begin{aligned} 2\lambda\alpha &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 , \\ 2\lambda\beta &= b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 , \\ 2\lambda\gamma &= c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 , \\ 2\lambda\theta &= d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 . \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Nous pouvons disposer de dix des quatorze paramètres contenus dans les seconds membres de ces équations. Prenons d'abord

$$\left\{\begin{array}{llll} c_1 = -a_1 , & c_2 = a_2 , & c_3 = -a_3 , \\ d_1 = 0 , & d_2 = a_1 - a_2 , & d_3 = 0 , \end{array}\right. \tag{16}$$

de façon à avoir

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha + \gamma) &= a_2 u_2 , \\ \lambda(\alpha + \gamma + 2\theta) &= a_1 u_2 , \end{aligned}$$

d'accord avec la remarque faite précédemment. Substituons les valeurs (15) et (16) dans l'équation (14); on aura

$$\begin{aligned} &(a_1 - a_2)^3 u_2^2 + 3(a_1 - a_2)(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3)^2 \\ &= 3a_1[(b_1 + a_1) u_1 + (b_2 + a_2) u_2 + (b_3 + a_3)] \\ &\quad [(b_1 - a_1) u_1 + (b_2 + a_2) u_2 + (b_3 - a_3)] . \end{aligned}$$

Nous pouvons encore disposer de quatre paramètres et nous allons déterminer $b_1$, $b_2$, $b_3$, $a_3$ de façon à annuler dans cette équation les coefficients de $u_1 u_2$, $u_1$, et $u_2$. Cette équation peut s'écrire ainsi

$$\mathrm{A}u_1^2 + \mathrm{B}u_1 u_2 + \mathrm{C}u_2^2 + \mathrm{D}u_1 + \mathrm{E}u_2 + \mathrm{F} = 0 , \tag{17}$$

les coefficients ayant les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= 3(b_1^2 a_2 - a_1^3) , \\ \mathrm{B} &= 6b_1 a_2 (a_1 + b_2) , \\ \mathrm{C} &= (a_2 - a_1)^3 + 3a_2[a_1(a_2 + b_2) + b_2(a_1 + b_2)] , \\ \mathrm{D} &= 6(b_1 a_2 b_3 - a_1^2 a_3) , \\ \mathrm{E} &= 6a_2 b_3 (a_1 + b_2) , \\ \mathrm{F} &= 3(a_2 b_3^2 - a_1 a_3^2) . \end{aligned}$$

On aura $\mathrm{B} = \mathrm{E} = \mathrm{D} = 0$, si l'on prend

$$\left\{\begin{array}{ll} b_2 = -a_1 , & b_1 = a_2 , \\ a_3 = a_2^2 , & b_3 = a_1^2 . \end{array}\right. \tag{18}$$

Dans ces conditions les coefficients A, C, F auront le facteur commun $a_2^3 - a_1^3$ qui est différent de zéro, car on doit supposer $a_1 \neq a_2$, à moins que $\theta = 0$, cas qui correspond à des solutions banales de l'équation (2) (par exemple $x = -y$, $z = t$). L'équation (17) se réduit ainsi à la forme simple:

$$3u_1^2 + u_2^2 = 3a_1 a_2 , \tag{19}$$

qui est la relation que doivent vérifier les quatre paramètres $a_1$, $a_2$, $u_1$, $u_2$ à l'aide desquels sont exprimés $\theta$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, pour que l'équation (14) et, par conséquent, la (2) soient satisfaites.

Or, cette équation (19) montre que $u_2$ est nécessairement divisible par 3; d'autre part, si l'on suppose que $u_1$ et $u_2$ ont un facteur commun $c$, on pourra poser

$$u_1 = ac , \quad u_2 = 3bc , \tag{20}$$

et l'équation (19) deviendra:

$$c^2 (a^2 + 3b^2) = a_1 a_2 .$$

On satisfera à cette dernière, en conservant l'homogénéité des formules, si l'on pose:

$$a_1 = a^2 + 3b^2 , \quad a_2 = c^2 . \tag{21}$$

Les formules (8) donnent, d'après les formules (15), (16), (18), (20), (21), les valeurs suivantes, après suppression du facteur arbitraire $2\lambda$

$$\left\{\begin{aligned} x &= (a^2 + 3b^2)(a + 3b)c + c^4 , \\ y &= (a^2 + 3b^2)^2 + c^3 (a - 3b) , \\ z &= -(a^2 + 3b^2)(a - 3b)c - c^4 , \\ t &= (a^2 + 3b^2)^2 + c^3 (a + 3b) . \end{aligned}\right. \tag{22}$$

On donnera dans ces formules des valeurs entières arbitraires aux trois paramètres $a$, $b$, $c$ pour obtenir des nombres entiers vérifiant l'équation (2).

5. — Nous nous proposons maintenant de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire étant donnée une solution quelconque en nombres entiers de l'équation (2), déterminer les valeurs entières des paramètres $a$, $b$, $c$ qui fournissent cette solution, à un facteur constant près. La solution de ce problème prouvera en même temps que les formules (22) donnent toutes les solutions entières

de l'équation (2), c'est-à-dire la solution générale en nombres entiers.

Supposons donnés quatre entiers $x$, $y$, $z$, $t$ vérifiant l'équation (2). On calculera $\theta$ par la formule

$$2\theta = x + y + z - t$$

et on formera les différences $x - \theta$, $y - \theta$, $z - \theta$, $-t - \theta$. On choisira trois quelconques de ces quatre différences et on les désignera par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, de façon que $\alpha + \gamma$ soit divisible par 3. Représentons par $\frac{m}{n}$ la fraction $\frac{\alpha + \gamma + 2\theta}{\alpha + \gamma}$ réduite à sa plus simple expression; on aura

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m}{n} \tag{23}$$

et les trois premières équations (15) pourront s'écrire, en prenant $\lambda = a_2$:

$$\left\{\begin{aligned} mu_1 + nu_2 + na_2 &= 2n\alpha\ , \\ n^2 u_1 - mnu_2 + m^2 a_2 &= 2n^2\beta\ , \\ -mu_1 + nu_2 - na_2 &= 2n\gamma\ . \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Le déterminant de ce système est

$$D = \begin{vmatrix} m & n & n \\ n^2 & -mn & m^2 \\ -m & n & -n \end{vmatrix} = -2n \begin{vmatrix} m & n \\ n^2 & m^2 \end{vmatrix} = -2n(m^3 - n^3)\ ,$$

qui est toujours différent de zéro, car $n \neq 0$, $m \neq n$, si l'on exclut les solutions banales de (2). On déduit des équations (24)

$$\left\{\begin{aligned} u_2 &= \alpha + \gamma\ , \\ a_2 &= \frac{2n^2}{D}\begin{vmatrix} m & n & \alpha \\ n & -m & \beta \\ -m & n & \gamma \end{vmatrix} = \frac{n}{m^3 - n^3}\left[(\gamma + \alpha)m^2 + 2mn\beta + (\gamma - \alpha)n^2\right] \\ u_1 &= \frac{n}{m}(\alpha - \gamma - a_2)\ , \end{aligned}\right. \tag{25}$$

et $a_1$ est donné par l'équation (23)

$$a_1 = \frac{m}{n} a_2\ . \tag{26}$$

Si l'on porte les valeurs (25) et (26) dans l'équation (19), on aura

$$-(m-n)^3(\alpha+\gamma)^2+12mn^2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+12n^3\beta^2=0\ .$$

En tenant compte que $m$ et $n$ sont proportionnels à $\alpha+\gamma+2\theta$ et $\alpha+\gamma$, respectivement, on constate aisément que la condition précédente équivaut à l'équation (14) qui est, par hypothèse, identiquement vérifiée. Les formules (25) et (26) donnent donc des valeurs proportionnelles à celles des paramètres $a_1$, $a_2$, $u_1$, $u_2$ correspondants à la solution donnée. L'équation (19) étant homogène, sera toujours vérifiée si l'on multiplie ces quatre valeurs par un facteur arbitraire. On pourra toujours choisir convenablement ce facteur de façon que $a_2$ soit un carré parfait. On aura alors pour les paramètres $a$, $b$, $c$ les valeurs suivantes

$$c=+\sqrt{a_2}\ ,\qquad a=\frac{u_1}{c}\ ,\qquad b=\frac{u_2}{3c}\ . \tag{27}$$

*Exemple.* — Soit la solution

$$38^3+48^3+79^3=87^3$$

On aura

$$2\theta=38+48+79-87=78\ ;\quad \theta=39\ ;$$

$$38-39=-1\ ;\quad 48-39=9\ ;\quad 79-39=40\ ;\quad -87-39=-126\ .$$

On pourra prendre, par exemple, $\alpha=40$, $\gamma=-1$, $\beta=9$. Par conséquent

$$\frac{\alpha+\gamma+2\theta}{\alpha+\gamma}=\frac{117}{39}=\frac{3}{1}\ ,$$

d'où $m=3$, $n=1$. Les formules (25) et (26) donnent

$$u_2=39=3.13\ ;\quad a_2=14=2.7\ ;\quad u_1=9=3^2\ ;\quad a_1=2.3.7\ .$$

Comme vérification du calcul, on a identiquement

$$3.3^4+3^2.13^2=3.2^2\ .\ 3.7^2\ .$$

En multipliant les valeurs obtenues par 2.7, on aura les valeurs définitives

$$a_2=2^2\ .\ 7^2\ ,\quad u_1=2.3^2\ .\ 7\ ,\quad u_2=2\ .\ 3\ .\ 7\ .\ 13\ ,$$

et par conséquent, d'après les formules (27)

$$c = 14 \ , \quad a = 9 \ , \quad b = 13 \ .$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules (22), on reproduit les valeurs données de $x$, $y$, $z$, $t$ multipliées par le facteur constant $2^4.7^3$.

Le seul critérium pour choisir les valeurs de $\alpha$ et $\gamma$ est que

$$\alpha + \gamma \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3) \ .$$

Ainsi, dans l'exemple qui précède on aurait pu prendre $\alpha = -1$, $\gamma = 40$, au lieu de $\alpha = 40$, $\gamma = -1$. On aura comme avant

$$m = 3 \ , \quad n = 1 \ , \quad u_2 = 3 \, . \, 13 \ .$$

Mais les valeurs de $a_2$ et de $u_1$ seront

$$a_2 = \frac{223}{13} \ , \qquad u_1 = -\frac{252}{13} \ .$$

On multipliera ces valeurs par 13 et par 223 et on aura les valeurs définitives

$$a_2 = 223^2 \ ; \quad u_1 = -252.223 \ , \quad u_2 = 3.13^2 \, . \, 223$$

et par conséquent

$$c = 223 \ , \quad a = -252 \ , \quad b = 169 \ .$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules (22), on reproduit encore les valeurs données de $x$, $y$, $z$, $t$, mais multipliées maintenant par $2.13.223^3$.

On aurait pu prendre aussi dans cet exemple $\alpha = -1$, $\gamma = 40$, $\beta = -126$, ou bien $\alpha = 9$, $\beta = 40$, $\gamma = -126$, etc.

En général, si la valeur de $a_2$ donnée par la formule (25) a des facteurs de la forme $f^{2p}$, $g^{2q+1}$, $h^{-r}$, les indéterminées calculées par les formules (22) seront divisibles par $2f^{2p} g^{2q+3} h^r$. Cependant, il peut se faire que $a_1$, $a_2$, $u_1$, $u_2$ aient un facteur commun tel qu'en le supprimant, $a_2$ devienne carré parfait. Par exemple, dans la solution

$$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3 \ ,$$

on a $\theta = 9$ et si l'on prend $\alpha = 8$, $\gamma = -2$, $\beta = 5$, on aura: $m = 4$, $n = 1$, $a_2 = 2$, $u_2 = 2.3$, $u_1 = 2$. En divisant ces résultats par 2, on aura comme valeurs définitives: $a_2 = 1$, $u_2 = 3$, $u_1 = 1$ et $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, valeurs que reproduisent la solution donnée, sans facteur constant.

6. — La solution générale de l'équation (2) au moyen de quatre paramètres a été donnée par EULER dans son *Algèbre* [1].

BINET [2] a réduit les formules d'EULER à deux paramètres, auxquels il faut attribuer non seulement des valeurs entières, mais aussi fractionnaires pour obtenir toutes les solutions entières. Il suffit de prendre $c = -1$ dans les formules (22) pour obtenir celles de BINET.

D'après M. FAUQUEMBERGUE [3], EULER avait aussi donné les formules à trois paramètres (*N. Comment.*, 1756-1757, p. 155).

Les formules de BINET ont été retrouvées par HERMITE en se servant d'une propriété des surfaces cubiques [4] et par M. MIRIMANOFF à l'aide d'une méthode élégante, consistant à abaisser au premier degré une des indéterminées, $x$, dans l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1 ,$$

mise sous la forme

$$(x - 1)(x - \alpha)(x - \alpha^2) + y^3 = z^3 ,$$

$\alpha$ étant une racine cubique complexe de l'unité [5].

Les formules de résolution de cette équation du troisième degré ont été données sous des formes différentes par divers auteurs [6].

---

1 *Elémens d'Algèbre*, édition de Lyon, 1795, t. II, p. 360.
2 *Comptes rendus*, t. XII, 1841, p. 248.
3 *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. IV, 1897, p. 63.
4 *Nouvelles Annales de Math.*, t. XI, 1872, p. 5; *Œuvres*, t. III, 1912, p. 115.
5 *Nouvelles Annales*, t. III, 2me série, 1903, p. 17.
6 DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, t. II, 1920, pp. 550-561.