

# SUR LE TRANGHET D'ARCHIMEDE

Autor(en): **Thébault, V.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26001>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LE TRANCHET D'ARCHIMEDE

PAR

V. THÉBAULT, Le Mans (Sarthe).

---

M. M. D'OCAGNE a repris des propriétés de la figure constituée par trois demi-cercles de diamètres BC, AC et AB, décrits d'un même côté d'une droite, sur laquelle sont marqués trois points A, B, C (A entre B et C), pour montrer les avantages que peut offrir la méthode de l'inversion en tant que moyen de démonstration<sup>1</sup>.

Cette configuration, qui fait l'objet des PROPOSITIONS IV ET V du *Livre des Lemmes* d'ARCHIMÈDE, a beaucoup occupé les géomètres. COCHEZ semble avoir eu le premier l'idée de transformer la figure par rayons vecteurs réciproques<sup>2</sup>. De notre côté, nous avons employé le même procédé pour généraliser la figure envisagée par le géomètre grec<sup>3</sup>.

Peut-être n'est-il pas sans intérêt d'ajouter encore des compléments.

1. — Soient A, B, C trois points marqués sur une droite (A entre B et C). D'un même côté de cette droite, traçons les demi-cercles (O), (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>) de diamètres BC = 2a, AC = 2b, AB = 2c, puis un demi-cercle, de rayon  $R = b + c + d$ , concentrique au demi-cercle (O), d étant une longueur donnée. Ce dernier demi-cercle coupe la droite BC en des points B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, et BB<sub>1</sub> = CC<sub>1</sub> = d, puis la tangente commune aux demi-cercles

---

<sup>1</sup> *L'Enseignement mathématique*, 1934, p. 73.

<sup>2</sup> *Journal de BOURGET*, 1878, p. 354.

<sup>3</sup> *Mathesis*, 1931, p. 187; *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, janvier 1935.

$(O_1), (O_2)$  en A, en un point T. Traçons les cercles  $(\omega_1), (\omega_2)$  qui touchent la droite AT, le demi-cercle (O), de rayon R, puis respectivement les demi-cercles  $(O_1), (O_2)$ . Nous allons montrer que les rayons  $\rho_1, \rho_2$  des cercles  $(\omega_1), (\omega_2)$  sont égaux.

En prenant A comme pôle d'inversion avec une puissance égale, en valeur absolue, au produit  $AB \cdot AC = 4bc$ , avec des

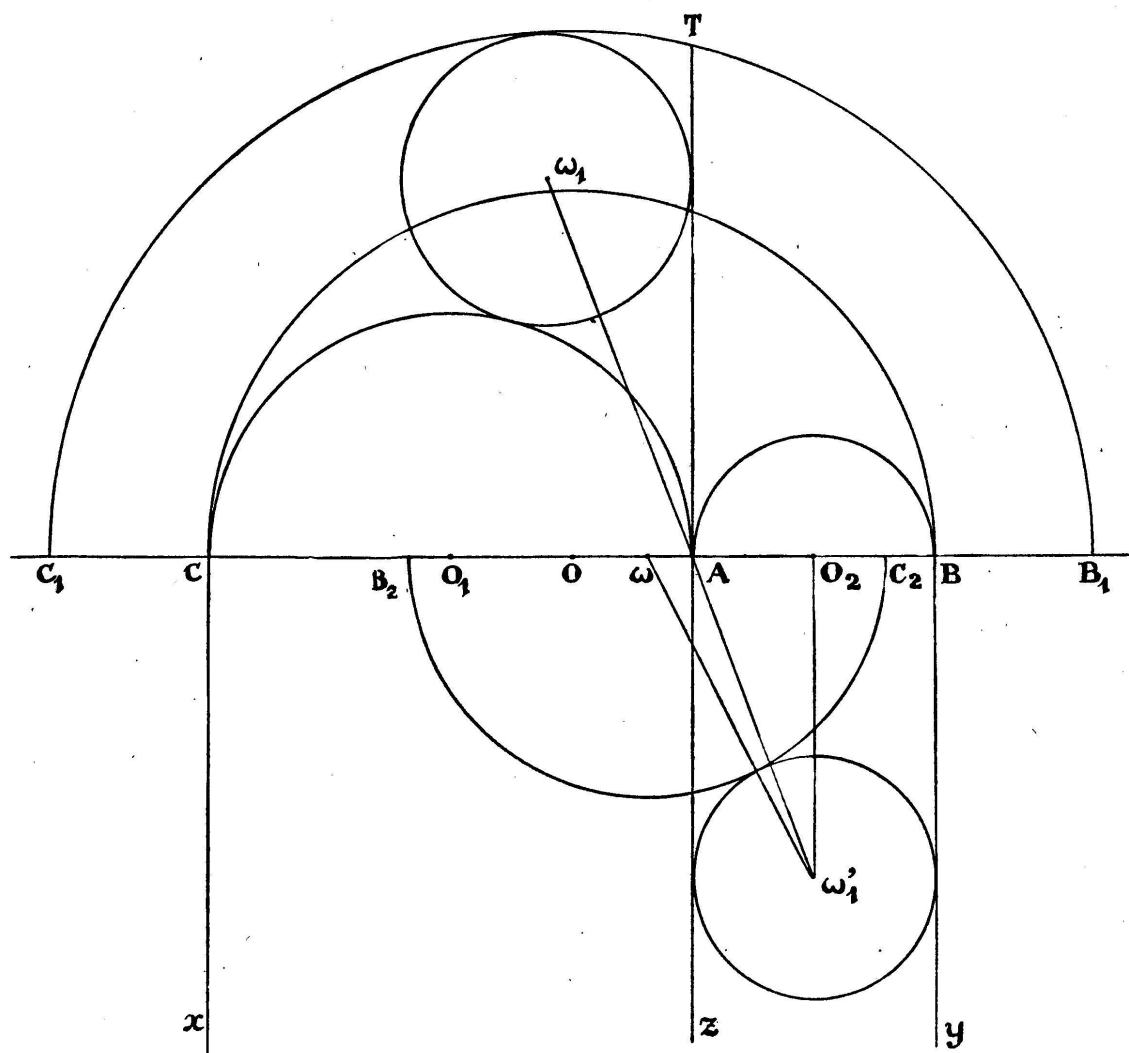


Fig. 1.

rayons vecteurs réciproques directement opposés, la droite AT et le cercle (O) se conservent, toutefois avec échange pour chacun d'eux de la partie située en dessus et de la partie située en dessous de la droite BC. Les cercles de diamètres AC et AB ont pour inverses respectivement les perpendiculaires Cx et By à la BC en B et C. Le demi-cercle (O), de rayon R, se transforme

en un demi-cercle, situé en dessous de BC, dont les extrémités B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub> du diamètre situé sur BC, sont des points tels que

$$AC_2 = \left| \frac{AB \cdot AC}{AC_1} \right| = \frac{4bc}{2b+d}, \quad AB_2 = \frac{4bc}{2c+d}. \quad (1)$$

Mais, quand on transforme un cercle de rayon R par inversion, pour obtenir un cercle de rayon ρ, le rapport  $\frac{\rho}{R}$  est égal à celui de la puissance d'inversion à celle du pôle par rapport au premier cercle. Appliquant cette remarque au calcul du rayon ρ du cercle (ω) de diamètre B<sub>2</sub>C<sub>2</sub> qui est le transformé du cercle (O), de rayon R, dans l'inversion de pôle A et de module (AB · AC) = 4bc, on a, en valeur absolue,

$$\frac{\rho}{R} = \frac{4bc}{R^2 - AO^2} = \frac{4bc}{(b+c+d)^2 - (b-c)^2};$$

d'où

$$\rho = \frac{4bcR}{(2b+d)(2c+d)} = \frac{4(b+c+d)bc}{(2b+d)(2c+d)}. \quad (2)$$

Dans la même inversion, les cercles (ω<sub>1</sub>), (ω<sub>2</sub>) deviennent des cercles (ω'<sub>1</sub>), (ω'<sub>2</sub>) tangents à la droite Az, symétrique de AT par rapport au point A, puis tangents respectivement aux droites By et Cx; les rayons de ces cercles valent donc ρ'<sub>1</sub> = c, ρ'<sub>2</sub> = b.

En vertu de la remarque relative au rapport des rayons de deux cercles inverses,

$$\frac{\rho'_1}{\rho_1} = \frac{\rho_1}{c} = \left| \frac{AB \cdot AC}{A\omega_1'^2 - \rho_1'^2} \right| = \frac{4bc}{A\omega_1'^2 - c^2} = \frac{4bc}{O_2\omega_1'^2}. \quad (3)$$

Or,

$$O_2\omega_1'^2 = \omega\omega'^2 - \omega\overline{O_2^3} = (\rho+c)^2 - \omega\overline{O_2^2} \quad (4)$$

$$\omega O_2 = \omega A + AO_2 = \frac{\rho}{R}(b-c) + c, \quad (5)$$

car, eu égard à (1) et (2),

$$\omega A = \left( \frac{4bc}{2b+d} \right) \cdot \left( \frac{b-c}{2c+d} \right) = \frac{\rho}{R}(b-c). \quad (6)$$



Introduisant la valeur (2) du rayon  $\rho$  dans l'égalité (4), il vient, après réductions,

$$O_2 \overline{\omega_1}^2 = \frac{8bc^2(2R+d)}{(2b+d)(2c+d)}, \quad (7)$$

et finalement

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(2b+d)(2c+d)}{2b+2c+d} \right]. \quad (8)$$

Si, au lieu du cercle ( $\omega_1$ ) on considère le cercle ( $\omega_2$ ), il suffit d'intervertir les rôles des demi-cercles ( $O_1$ ), ( $O_2$ ), c'est-à-dire de permuter  $b$  et  $c$ , pour avoir  $\rho_1 = \rho_2$ . Dans la configuration d'ARCHIMÈDE (PROPOSITION V), si l'on remplace le demi-cercle ( $O$ ), décrit sur  $BC$  comme diamètre, par un demi-cercle concentrique au premier, les demi-cercles ( $O_1$ ), ( $O_2$ ) décrits sur  $AC$ ,  $AB$  comme diamètres restant fixes, les rayons des cercles ( $\omega_1$ ), ( $\omega_2$ ) tangents au dernier demi-cercle de centre  $O$ , à la perpendiculaire en  $A$  à  $BC$ , puis respectivement aux demi-cercles ( $O_1$ ), ( $O_2$ ), sont égaux.

*Remarques.* — 1° Lorsque  $d = 0$ , on retrouve la formule connue

$$\rho_1 = \frac{bc}{b+c} = \frac{bc}{a} = \rho_2. \quad (9)$$

2° La relation (8) conduit aisément à la suivante

$$\frac{1}{2\rho_1} = \frac{1}{2\rho_2} = \frac{1}{2b+d} + \frac{1}{2c+d} - \frac{d}{(2b+d)(2c+d)} \quad (10)$$

qui, pour  $d = 0$ , devient

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \quad (11)$$

3° Supposons que les demi-cercles ( $O_1$ ), ( $O_2$ ) ne se touchent plus. Soient  $AC = 2b$ ,  $BD = 2c$  leurs diamètres;  $\Delta$  l'axe radical de ces cercles; ( $O$ ) le demi-cercle de rayon  $R = a + d$  concentrique au demi-cercle ( $O$ ) de diamètre  $BC$ . Les rayons  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  des cercles ( $\omega_1$ ), ( $\omega_2$ ) tangents à  $\Delta$ , au demi-cercle ( $O$ ), de rayon  $R$ , puis tangents respectivement aux demi-cercles ( $O_1$ ), ( $O_2$ ), sont égaux<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Cette proposition a été énoncée, sans démonstration, par STEINER (*Œuvres complètes*, t. I, p. 178).

Dans ce cas général, l'évaluation des rayons  $\rho_1, \rho_2$  au moyen de l'inversion est assez laborieuse. Par un calcul direct simple, nous avons obtenu <sup>1</sup>

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{2a(a-b)(a-c)}{(2a+d)(2a-b-c)} + \frac{d}{2}. \quad (12)$$

2. — U et V étant les intersections des demi-cercles décrits sur  $BO_1, CO_2$  comme diamètres avec les demi-cercles  $(O_1), (O_2)$ , les rayons des cercles inscrits aux triangles curvilignes ABU et BCU sont égaux ainsi que les rayons des cercles inscrits aux triangles curvilignes ACV et CBV. Cette propriété que M. M. d'OCAGNE supposait n'avoir peut-être pas encore été remarquée, paraît appartenir à COCHEZ qui l'a obtenue au moyen de l'inversion <sup>2</sup>.

Conservons les notations utilisées jusqu'ici, puis considérons les transformés  $M_1, M_2$  des points C et B par l'homothétie de centre A et de module <sup>3</sup>  $k$ . Au-dessus de BC, traçons les demi-cercles  $(O'_1), (O'_2)$  sur  $BM_1, CM_2$  comme diamètres, puis les cercles  $(\omega_1), (\omega_2)$  tangents au demi-cercle (O), à la droite  $AT \equiv \Delta$  et respectivement aux demi-cercles  $(O'_1), (O'_2)$ . Soient  $X_1, Y_1, Z_1$  et  $X_2, Y_2, Z_2$  les contacts respectifs. Nous allons prouver que les rayons des cercles  $(\omega_1), (\omega_2)$  sont égaux.

Observons d'abord que la droite  $AT \equiv \Delta$  est l'axe radical des cercles  $(O'_1), (O'_2)$ , puisque

$$|AM_1 \cdot AB| = |k \cdot AC \cdot AB| = |AM_2 \cdot AC|. \quad (13)$$

De plus, le point  $X_1$  étant l'un des centres de similitude des cercles (O) et  $(O'_1)$ , la droite  $CX_1$  rencontre le cercle  $(O'_1)$  au point  $T_1$  de contact de la tangente à ce cercle qui est perpendiculaire à BC. La droite  $AY_1$  coupe le cercle  $(O'_1)$  au contact de ce cercle avec la tangente perpendiculaire à BC, c'est-à-dire au point  $Z_1$ . Soient M, N les points de rencontre des droites CT, BT avec les demi-cercles  $(O'_1), (O'_2)$ ;  $\mu$  la projection orthogonale du point M sur BC.

<sup>1</sup> Annales de la Société scientifique de Bruxelles, loc. cit.

<sup>2</sup> Loc. cit.

<sup>3</sup> Pour fixer les idées, nous supposons  $k < 1$ .



les droites  $\Delta$  et  $\Delta_2$ ,  $\Delta_2$  étant la perpendiculaire à BC qui passe par le point N; le diamètre du cercle ( $\omega_2$ ) est égal à  $T_2Z_2 = 2\rho_2$ .

Les diamètres des cercles ( $\omega_1$ ), ( $\omega_2$ ), égalant les distances des sommets M, N du rectangle MTNE formé par les droites CT, BT,  $O_1'N$ ,  $O_2'M$  à sa diagonale TE, sont égaux, ce qui justifie la proposition que nous avons énoncée.

Si l'on observe que

$$AO_1 = k \cdot AC = 2kb, \quad AO_2 = k \cdot AB = 2kc, \quad (15)$$

les égalités

$$\frac{CA}{C\mu} = \frac{CB}{CM_2} = \frac{CB}{CA + AM_2} = \frac{a}{b + kc}, \quad (16)$$

$$\frac{b}{\rho_1} = \frac{CA}{\mu A} = \frac{CA}{CA - C\mu} = \frac{a}{a - (b + kc)}, \quad (17)$$

conduisent à l'expression des rayons des cercles ( $\omega_1$ ), ( $\omega_2$ ),

$$\rho_1 = \frac{b[a - (b + kc)]}{a} = \frac{b(b + c - b - kc)}{a} = (1 - k) \frac{bc}{a} = \rho_2. \quad (18)$$

Si  $\alpha = \frac{bc}{a}$  désigne le rayon des cercles égaux inscrits aux triangles mixtilignes ATB et ACT,

$$\frac{\rho_1}{\alpha} = \frac{\rho_2}{\alpha} = 1 - k. \quad (19)$$

3. — Reprenons la figure envisagée par M. M. D'OCAGNE, où les demi-cercles ( $O_1'$ ), ( $O_2'$ ) sont décrits sur  $CO_2$ ,  $BO_1$  comme diamètres et pour laquelle  $k = 1 : 2$ . Cherchons les rayons  $\rho_1'$ ,  $\rho_2'$  des cercles ( $\varphi_1$ ), ( $\varphi_2$ ) inscrits aux triangles mixtilignes AUP, APV.

Transformons la figure par une inversion (A,  $4bc$ ). Le demi-cercle ( $O_2'$ ), de diamètre  $BO_1$ , devient le demi-cercle de diamètre CD, en dessous de BC, le point D étant tel que

$$|AO_1 \cdot AD| = |AB \cdot AC| = 4bc,$$

d'où

$$AD = \frac{4bc}{b} = 4c = 2AB. \quad (20)$$

Le demi-cercle ( $O_1$ ) et la droite AT se transforment en les perpendiculaires  $By$  et  $Az$  à la droite BC, en dessous de cette droite. Le cercle ( $\varphi'_1$ ), inverse du cercle ( $\varphi_1$ ), touche donc les droites  $By$ ,  $Az$  et le cercle ( $C_1$ ) dont le centre  $C_1$  est au milieu du segment rectiligne  $O_1D$ ; le rayon du cercle ( $\varphi_1$ ) est égal à  $c$ .

En vertu de la remarque relative au rapport des rayons de deux cercles inverses, déjà utilisée,

$$\frac{\rho'_1}{c} = \left| \frac{AB \cdot AC}{O_2 \overline{O_1}^2} \right| = \frac{4bc}{C_1 \overline{O_1}^2 - C_1 \overline{O_2}^2} \quad (21)$$

Mais

$$C_1 \overline{O_1} = \frac{1}{2} CD + c = \frac{1}{2} (CA + AD) + c = \frac{1}{2} (2b + 4c) + c = b + 3c, \quad (22)$$

$$C_1 \overline{O_2} = CO_2 - CC_1 = CO_2 - \frac{1}{2} CD = 2b + c - (b + 2c) = b - c. \quad (23)$$

Dès lors,

$$\frac{\rho'_1}{c} = \frac{4bc}{(b + 3c)^2 - (b - c)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{b + c},$$

$$\rho'_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{b + c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a}, \quad (24)$$

et, permutant  $b$  et  $c$ ,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a} = \rho'_1 = \rho'_2. \quad (25)$$

Si  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  désignent les rayons des cercles inscrits aux triangles mixtilignes ACT, ATB,  $\alpha'_1$ ,  $\alpha'_2$  ceux des cercles inscrits aux triangles mixtilignes CTP, BPT,

$$\alpha_1 = \frac{bc}{a} = \alpha_2, \quad \alpha'_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a} = \alpha'_2, \quad (26)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha'_1 = 2\alpha'_2 = 2\rho'_1 = 2\rho'_2. \quad (27)$$

*Les diamètres des cercles inscrits aux triangles mixtilignes CTP, BPT, AUP, APV sont égaux aux rayons des cercles inscrits aux triangles mixtilignes CTA, ATB.*

4. — Envisageons les cercles  $(\beta_1)$ ,  $(\beta_2)$ , de rayons  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , inscrits aux triangles mixtilignes ACP, APB. Dans la même inversion (A,  $\frac{1}{4}bc$ ), le cercle  $(\beta_1)$ , par exemple, devient un cercle  $(\beta'_1)$  tangent aux droites By, Az et au cercle  $(B_1)$  de diamètre  $BE = BC + 2AC = 2(2b + c)$ ; le rayon du cercle  $(\beta'_1)$  est égal à  $c$ . Dès lors, on a

$$\frac{\gamma_1}{c} = \frac{4bc}{O_2\beta_1'^2} = \frac{4bc}{B_1\beta_1'^2 - B_1O_2^2}. \quad (28)$$

Or,

$$B_1\beta_1' = \frac{1}{2}BE + c = 2b + c + c = 2(b + c) \quad (29)$$

$$B_1B_2 = B_1B - O_2B = \frac{1}{2}BE - c = 2b + c - c = 2b. \quad (30)$$

Par suite,

$$\frac{\gamma_1}{c} = \frac{4bc}{4[(b + c)^2 - b^2]} = \frac{b}{2b + c}; \quad \gamma_1 = \frac{bc}{2b + c} = \frac{bc}{a + b}; \quad (31)$$

puis, permutant  $b$  et  $c$ ,

$$\frac{bc}{b + 2c} = \frac{bc}{a + c} = \gamma_2. \quad (32)$$

Finalement, on déduit les relations remarquables

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}, \quad (33)$$

$\beta$ ,  $\gamma$  étant les rayons des cercles inscrits aux triangles curvilignes ABU et BCU, ACV et CBV.

5. — En passant, M. M. D'OCAGNE (*loc. cit.*), a rappelé l'expression

$$\frac{\pi}{2}(a^2 - b^2 - c^2) = \frac{\pi}{2}[(b + c)^2 - b^2 - c^2] = \pi bc, \quad (34)$$

de l'aire du triangle curviligne ABC qui a reçu le nom de *tranchet d'Archimède*. Elle est donc égale à celle du cercle de diamètre AT.

<sup>1</sup> M. D'OCAGNE, *loc. cit.*

Considérons la figure constituée par deux cercles *quelconques*  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  que, pour fixer les idées, nous supposons *extérieurs* l'un à l'autre. Leur ligne des centres  $O_1O_2$  rencontre ces cercles respectivement en des points  $A$  et  $C$ ,  $D$  et  $B$  ( $A$  et  $D$  entre  $B$  et  $C$ ). Traçons les demi-cercles  $(O)$ ,  $(O')$  sur  $BC$ ,  $AD$  comme diamètres, le premier en dessus, le second en dessous de  $BC$ . Soit  $\Delta$  l'axe radical des cercles  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  qui coupe le demi-cercle  $(O)$  en un point  $T$ , le demi-cercle  $(O')$  en un point  $T'$ .

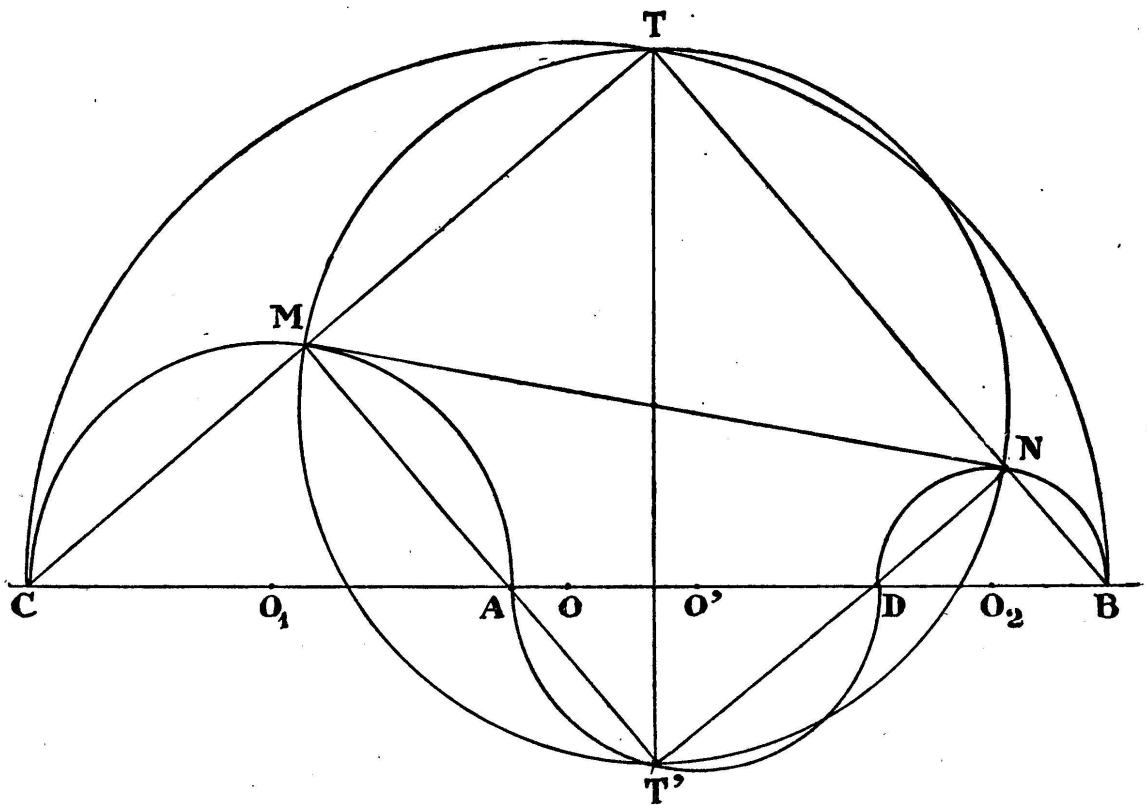


Fig. 3.

Les droites  $CT$  et  $AT'$ ,  $BT$  et  $DT'$  rencontrent les cercles  $(O_1)$ ,  $(O_2)$  aux contacts  $M$ ,  $N$  de ces cercles avec leur tangente commune extérieure et la figure  $MTNT'$  est un rectangle. Si l'on pose

$$BC = 2a, \quad AC = 2b, \quad DB = 2c, \quad CD = 2a - b - c,$$

on obtient aisément

$$\overline{MN}^2 = \overline{TT'}^2 = 4(a - b)(a - c). \quad (35)$$

L'aire S, intérieure au cercle (O), limitée par les demi-circon-  
férences (O), (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>), (O') a pour expression

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} [a^2 - b^2 - c^2 + (2a - b - c)^2] = \pi [a^2 + bc - a(b + c)] \\ &= \pi(a - b)(a - c) = \pi \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{TT'}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Lorsque les demi-cercles (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>) se touchent en A, l'aire S ainsi déterminée est celle du *tranchet*. Si les demi-cercles (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>) ont des rayons égaux, la figure limitée par les quatre demi-circonférences, considérée aussi par ARCHIMÈDE<sup>1</sup>, est connue sous le nom de *Salinon*, ou *feuille d'ache* (σέλενον). Notre formule (36) permet donc d'énoncer le théorème suivant qui généralise les PROPOSITIONS IV et XIV du géomètre grec :

*Sur le diamètre BC d'un cercle (O), on marque deux points A et D (entre B et C), puis on décrit les demi-cercles (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>), (O') sur AC, DB, AD, comme diamètres, les deux premiers en dessus, le troisième en dessous de BC. Soit Δ l'axe radical des cercles (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>) qui rencontre les demi-cercles (O), (O') en des points T, T'. L'aire limitée par les demi-circonférences (O), (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>), en dessus de BC, et par la demi-circonférence (O'), en dessous de BC, est équivalente à celle du cercle décrit sur TT' comme diamètre.*

N. B. — Si les cercles (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>) sont sécants, il y a lieu de faire intervenir un sens à l'aire comprise entre les demi-circonférences, et la propriété subsiste.

---

<sup>1</sup> Livre des heures.