# II. — Applications.

*En résumé pour que l'équation* (3) *puisse être ramenée à l'équation de la chaleur, il faut que la fonction* f (x, y) *soit telle que l'expression*

$$\frac{2ff_{yy} + 2f^2 f_x - 3f_y^2}{f^3}$$

*ne dépende que de la seule variable* x.

La condition précédente peut être mise sous une forme plus remarquable si l'on observe, comme le montre un calcul facile, que la condition d'intégrabilité (8) peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\mathrm{X}f^{-\frac{1}{2}}\right) + f\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{X}f^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 . \tag{9}$$

D'où l'énoncé suivant:

*On saura ramener l'équation* (3) *à l'équation de la chaleur chaque fois qu'on connaîtra une fonction* X *de* x *telle que* $\mathrm{X}f^{-\frac{1}{2}}$ *soit solution de l'équation* (3).

## II. — Applications.

5. — Première application. — *Comment faut-il choisir les fonctions* X *et* $\mathrm{X}_1$ *de* x *pour que l'équation*

$$t + \frac{\mathrm{X}}{(\mathrm{X}y + \mathrm{X}_1)^2}p = 0 \tag{10}$$

*soit réductible à l'équation* t = p *par un changement de variables ?*

L'équation (6) s'écrit ici:

$$p - (\mathrm{X}y + \mathrm{X}_1)q = 0 .$$

Pour obtenir l'intégrale de cette équation on est amené à considérer l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{X}y + \mathrm{X}_1 = 0$$

dont l'intégrale générale résolue par rapport à la constante $u$ s'écrit, comme on le sait:

$$u = \int X_1 e^{\int X dx} dx + y e^{\int X dx} .$$

Nous prendrons donc $y'$ sous la forme

$$y' = \mu(u) = \mu\left(\int X_1 e^{\int X dx} dx + y e^{\int X dx}\right) .$$

Ecrivons que cette fonction $y'$ vérifie l'équation donnée (10). On devra avoir:

$$\mu'' + \frac{X}{(Xy + X_1) e^{\int X dx}} \mu' = 0 .$$

Pour qu'on ait affaire à une équation différentielle entre $\mu$ et $u$, il faut que le coefficient de $\mu'$ soit fonction de $u$, ce que l'on peut aussi bien écrire

$$y e^{\int X dx} + \int X_1 e^{\int X dx} dx = F\left(\frac{(Xy + X_1) e^{\int X dx}}{X}\right) . \qquad (11)$$

Constatons tout de suite que ceci a lieu quand $X_1$ est identiquement nul. Nous pouvons donc affirmer que *les équations de la forme* $t + \frac{1}{Xy^2} p = 0$, *ou ce qui revient au même, de la forme*

$$t + \frac{X}{y^2} p = 0 , \qquad (12)$$

*où* X *désigne une fonction quelconque de* x, *peuvent se ramener à l'équation de la chaleur.*

Supposons maintenant que $X_1$ ne soit pas identiquement nul. Si on dérive (11) par rapport à $y$ on a

$$e^{\int X dx} = e^{\int X dx} F' , \qquad \text{d'où} \quad F' = 1$$

et (11) s'écrit donc

$$y e^{\int X dx} + \int X_1 e^{\int X dx} dx = \frac{(Xy + X_1) e^{\int X dx}}{X} + a ,$$

$a$ désignant une constante arbitraire, ou encore

$$X \int X_1 e^{\int X dx} dx = X_1 e^{\int X dx} + aX \,.$$

En dérivant par rapport à $x$ on obtient

$$X' \int X_1 e^{\int X dx} dx = X_1' e^{\int X dx} + aX' \,.$$

Si l'on divise membre à membre ces deux dernières relations on a

$$\frac{X'}{X} = \frac{X_1'}{X_1} \,,$$

d'où l'on tire

$$X_1 = kX \,,$$

$k$ étant une constante. L'équation (10) a alors la forme

$$t + \frac{1}{X(y+k)^2} p = 0 \,,$$

qui n'est pas au fond essentiellement différente de celle que nous avait donnée le cas où $X_1$ était identiquement nul.

Effectuons maintenant la réduction de l'équation

$$t + \frac{X}{y^2} p = 0 \tag{12}$$

à celle de la chaleur.

On a successivement

$$u = y e^{\int \frac{dx}{X}} \,,$$

$$y' = \log u = \log y + \int \frac{dx}{X} \,; \qquad x' = -\int \frac{dx}{X} \,.$$

Parmi les équations (12) il en est une qui présente un certain intérêt historique [1]. C'est l'équation

$$t - \frac{2x}{y^2} p = 0 \,. \tag{12'}$$

[1] Ed. GOURSAT, *Second ordre*, t. I, p. 80.

Cette équation a été étudiée par Ampère qui la déduisait de l'équation

$$(x + q)^2 r + 2(x + q)(y + p)s + (y + p)^2 t + 2(x + q)(y + p) = 0$$

par l'application d'une transformation de contact. Ampère la simplifiait ensuite en posant $y^2 = xe^{y'}$ et obtenait $\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - 2x\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Or c'est précisément à ce changement de la variable $y$ que nous conduit l'application de la formule

$$y' = \log y + \int \frac{dx}{X} .$$

Les équations (12) possèdent quelques propriétés intéressantes que nous allons indiquer maintenant.

D'abord un changement de variable portant sur $x$ seul permet d'écrire (12) sous la forme considérée par Ampère (12′).

On peut faire entre (12′) et l'équation de la chaleur (1), $t = p$, un rapprochement du même genre que celui qu'on fait, quand on étudie les équations différentielles linéaires, entre les équations à coefficients constants et les équations d'Euler. Le changement de variables qui permet de passer de (12′) à (1) rappelle celui qui ramène une équation d'Euler à une équation à coefficients constants. On peut faire une remarque analogue en ce qui concerne les intégrales. L'équation de la chaleur admet une solution de forme exponentielle (comme les équations à coefficients constants) tandis que l'équation (12′) admet une solution de la forme $x^\alpha y^\beta$ qui rappelle celle des intégrales des équations d'Euler et à partir de laquelle on pourrait évidemment déduire d'autres solutions.

Au point de vue de la généralisation d'une solution particulière de (12′) il est encore important d'observer que cette équation admet la transformation $x' = ax$, $y' = a^2 y$ d'où il résulte que si $u(x, y)$ est une solution, il en est de même de $u(ax, a^2 y)$.

6. — Seconde application. — *Soit l'équation*

$$t + \frac{X}{Y} p = 0 \tag{13}$$

*où* X *et* Y *sont respectivement fonctions de* x *et* y. *Déterminer toutes les formes de ces fonctions pour que cette équation soit réductible à celle de la chaleur.*

On a ici

$$f(x\,,\,y) = \frac{X}{Y}\,, \qquad f_y = -\,\frac{XY'}{Y^2}\,.$$

L'équation (6) s'écrit

$$2\,Xp - Y'q = 0\,.$$

C'est une équation à variables séparées. La fonction $\mu\,(x,\,y)$ est fonction de $x$ et $y$ par l'intermédiaire de la variable $u$ définie par

$$u = \int \frac{dx}{2\,X} + \int \frac{dy}{Y'}\,.$$

On a alors

$$\mu_x = \frac{1}{2\,X}\mu'\,, \qquad \mu_y = \frac{1}{Y'}\mu'\,, \qquad \mu_{yy} = \frac{1}{Y'^2}\mu'' - \frac{Y''}{Y'^2}\mu'\,.$$

La fonction $\mu$ doit satisfaire à l'équation (13), ce qui donne

$$\mu'' + \left(\frac{Y'^2}{2\,Y} - Y''\right)\mu' = 0\,.$$

Pour que cette égalité soit une équation différentielle entre $\mu$ et $u$ il faut que le coefficient de $\mu'$, qui ne dépend que de $y$, se réduise à une constante $k$, puisque $u$ dépend de $x$

$$2\,YY'' - Y'^2 + 2\,kY = 0\,. \tag{14}$$

Donc *l'équation* (13) *est réductible à l'équation de la chaleur lorsque* Y *est une fonction de* y *vérifiant l'équation différentielle* (14). *La fonction* X *de* x *pourra être prise arbitrairement.*

Examinons en particulier le cas où $k$ est nul.

Alors (14) devient

$$\frac{Y'}{Y} - \frac{2\,Y''}{Y'} = 0\,,$$

d'où

$$\log Y - \log Y'^2 = c^{te} = \log \frac{1}{4\,a^2}\,, \qquad Y' = 2\,a\sqrt{Y}\,.$$

On tire de là:

$$Y = (ay + b)^2 ,$$

$a$ et $b$ désignant des constantes [1]. On retrouve les résultats obtenus dans l'exercice précédent.

Etudions maintenant le cas général où $k$ n'est pas nul dans l'équation (14).

Pour intégrer cette équation nous prendrons Y comme variable et $y$ comme inconnue. Posons $Y' = \frac{dY}{dy} = p$.

Alors $Y'' = \frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dY}$.

L'équation (14) devient

$$2Yp\frac{dp}{dY} = p^2 - 2kY .$$

Si on pose provisoirement $p^2 = \varphi$, elle s'écrit

$$\varphi' = \frac{\varphi}{Y} - 2k .$$

On a une équation linéaire pour déterminer $\varphi$. Son intégrale générale est

$$\varphi = Y(4a^2 - 2k \log Y) .$$

On a ensuite pour déterminer Y l'intégrale

$$y = \int \frac{dY}{\sqrt{Y(4a^2 - 2k \log Y)}} . \tag{15}$$

7. — Troisième application. — *Trouver la forme la plus générale de la fonction* X *de* x *pour que l'équation*

$$t + \frac{X}{x^2 + y^2}p = 0 \tag{16}$$

*soit réductible à l'équation de la chaleur par un changement de variables.*

---

[1] On peut aussi intégrer l'équation $Y'^2 - 2YY'' = 0$ en dérivant par rapport à $y$. On trouve $Y''' = 0$, d'où $Y = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$. Mais Y ne doit dépendre que de deux constantes arbitraires. En écrivant que $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ vérifie $Y'^2 - 2YY'' = 0$ on obtient: $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

On a ici:

$$f(x\,,\,y) = \frac{X}{x^2 + y^2}\,, \qquad f_y = \frac{-\,2\,Xy}{(x^2 + y^2)^2}\,.$$

L'équation (6) s'écrit:

$$pX - qy = 0\,.$$

On prendra pour $y' = \mu(x, y)$ une fonction de

$$u = \int \frac{dx}{X} + \log y\,.$$

Il faut que la fonction $\mu$ soit solution de (16)

$$\mu_x = \frac{1}{X}\mu'\,, \qquad \mu_y = \frac{1}{y}\mu'\,, \qquad \mu_{yy} = \frac{1}{y^2}\mu'' - \frac{1}{y^2}\mu'\,.$$

On doit avoir, par conséquent,

$$\mu'' - \frac{x^2}{x^2 + y^2}\mu' = 0\,,$$

ou

$$\mu'' - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\mu' = 0\,.$$

Il faut donc que la variable $u$ dont dépend la fonction $\mu$ soit fonction de $\frac{y}{x}$. Ainsi

$$\int \frac{dx}{X} + \log y = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

On tire de là, en dérivant successivement par rapport à $x$ et à $y$:

$$\frac{1}{X} = -\,\frac{y}{x^2}\varphi'\,, \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{x}\varphi'\,.$$

En divisant ces deux relations membre à membre on est finalement conduit à $X = -\,x$.

*Il en résulte que la seule équation de la forme (16) réductible à l'équation de la chaleur est*

$$t - \frac{x}{x^2 + y^2}p = 0\,. \qquad (17)$$

Effectuons la réduction :

(6) s'écrit maintenant $px + qy = 0$, d'où $y' = \mu(x, y) = \mu\left(\frac{y}{x}\right)$.

Il faut que $\mu'' + \frac{1}{1+u^2}\mu' = 0$, en posant $y = ux$. On prendra donc

$$y' = \mu = \log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \log \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} .$$

L'équation (17) devient alors:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

On fait ensuite

$$x' = \log x$$

pour obtenir:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} = \frac{\partial z}{\partial x'} .$$

8. — Quatrième application. — *Déterminer la relation qui doit unir les constantes $\alpha$ et $\beta$ dans l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{\alpha x + \beta y}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

*pour qu'on puisse ramener cette équation à celle de la chaleur.*

Cette relation est $2\alpha = \beta^2$.

Exemples:

$$t + \frac{2}{x \pm 2y}p = 0 \ ; \qquad 2t + \frac{1}{x \pm y}p = 0 .$$

## III. — Sur un problème d'asymptotiques.

9. — Lorsqu'on cherche les surfaces dont les lignes asymptotiques de l'un des systèmes se projettent sur le plan des $xy$ suivant les courbes $(\Gamma)$ d'équation

$$\varphi(x, y) = c^{te} , \tag{19}$$

on est conduit à l'équation

$$X(z) = \varphi_y^2 r - 2\varphi_x\varphi_y s + \varphi_x^2 t = 0 . \tag{20}$$