

# III. — Géométrie élémentaire et Topologie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

exemples fort intéressants à ce sujet et des théorèmes très instructifs, tandis que je me suis attaché à l'étude des prolongements analytiques et des lignes de ramification.

Avant de terminer cet exposé, je voudrais vous citer un exemple où le caractère multiforme d'un potentiel newtonien prolongé apparaîtra avec toute la clarté et la précision nécessaires. Je laisse au lecteur le soin de refaire le dessin.

Envisageons une couche homogène, comprise entre deux sphères concentriques, puis une autre couche identique à la première, mais occupant une position différente et telle que les deux cavités aient une partie commune  $S$ . Les deux couches engendrent le même potentiel constant dans la partie commune. Retranchons l'anneau commun aux deux corps. Les potentiels des deux parties restantes sont encore identiques entre eux dans  $S$ . Maintenant, sortons de  $S$  en évitant la première couche et passant au travers de l'anneau retranché pour aller jusqu'en un point  $M$  dans l'espace extérieur. Faisons de même avec la seconde couche en traversant encore l'anneau mais dans l'autre sens, pour aboutir au même point extérieur. Par ce procédé, l'on a suivi la détermination physique du potentiel en évitant les masses attirantes, mais, au point  $M$  les deux déterminations données doivent différer, car en ce point, l'attraction de l'une des couches ne peut plus coïncider avec l'attraction de l'autre. Voici donc un exemple où le caractère multiforme du potentiel apparaît nettement. Les arêtes de l'anneau sont quatre lignes de ramification de la fonction analytique qui coïncide avec les deux potentiels newtoniens dans  $S$ . Et ces lignes sont en même temps les arêtes des corps attirants.

Ce bref aperçu du problème inverse aura suffi, je l'espère, à vous convaincre que la théorie des fonctions et la théorie du potentiel newtonien ont encore de précieux services à se rendre.

Quoi qu'il en soit des interprétations que l'avenir réserve à la gravitation, la loi de Newton sous sa forme si précise et si simple est encore aujourd'hui pour les mathématiques une merveilleuse hypothèse de travail et une source abondante de résultats nouveaux.

### III. — GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ET TOPOLOGIE.

#### *Résumé de la conférence de M. le prof. H. Hopf (Zurich).*

Après un tracé approximatif des limites de la « géométrie élémentaire » — figures accessibles à l'intuition, méthode indépendante des procédés infinitésimaux — et un bref rappel du « Programme d'Erlangen »<sup>1</sup> de Klein, selon qui la topologie est l'étude des propriétés des figures géométriques que n'altèrent pas les transformations biuni-

<sup>1</sup> F. KLEIN, *Ges. Math. Abhandlungen* (Berlin, 1921), t. 1, p. 460 sq.

voques et continues — « topologiques » — (de là vient qu'il est si difficile, dans la confection d'un dessin ou d'un modèle, de commettre une erreur topologique), il fut question de quelques propriétés topologiques connues de figures élémentaires, découvertes et étudiées par Euler: le théorème d'Euler sur les polyèdres (dans toute division de la sphère en polygones, le nombre de sommets et de faces est égal au nombre d'arêtes plus deux)<sup>1</sup> et le problème « des ponts de Königsberg »<sup>2</sup>, ainsi que ce théorème analogue, qu'on retrouve sous différentes formes en géométrie amusante: « 5 points sont donnés dans le plan; il est alors impossible de les unir deux à deux par des chemins de manière que ces 10 chemins n'aient aucun point commun, excepté leurs extrémités communes. » Il y a quelque chose d'analogue, semble-t-il, dans le fameux « théorème des quatre couleurs », encore non démontré: « les pays de toute carte géographique, tracée sur le plan ou sur la sphère, peuvent être colorés, avec quatre couleurs au plus, de manière que deux pays qui ont une ligne frontière commune ne soient pas de la même couleur »<sup>3</sup>, et cette analogie suggère précisément d'en chercher la démonstration.

Il est remarquable, au sujet du problème des quatre couleurs, que la solution d'une question aussi simple et même accessible au laïque soit encore inconnue sans qu'on sache proprement où gît la difficulté; d'autre part, beaucoup d'autres assertions (et plus importantes) de topologie paraissent si plausibles à l'intuition normale, qu'une démonstration n'en est pas jugée nécessaire et qu'on accuse de pédanterie celui qui les démontre; est-il donc vraiment indispensable, demande-t-on par exemple, de démontrer complètement et avec tous les détails le « théorème de Jordan pour les polygones », que tout polygone fermé à  $n$  sommets partage le plan en deux régions; l'intuition saine ne dit-elle pas déjà que ce théorème a lieu? Deux arguments réfutent cette accusation de pédanterie: d'abord l'intuition *ne* vous dit *pas* que le théorème de Jordan est juste pour tout polygone, car vous ne pouvez pas vous représenter un polygone à  $10^{10}$  sommets; il y a lieu de se méfier de la certitude intuitive; nous sommes loin de connaître par l'expérience toute l'abondance des figures géométriques possibles; c'est ainsi qu'avant la découverte du ruban de Möbius on ne pressentait rien de l'existence des surfaces unilatères<sup>4</sup>. En second lieu, une démonstration ne doit pas seulement confirmer l'exactitude d'une affirmation, mais elle doit aussi nous conduire aux racines du théo-

<sup>1</sup> On trouve des démonstrations dans les livres suivants: HILBERT und COHN-VOSSEN, *Anschauliche Geometrie* (Berlin, 1932), p. 255 sq. et RADEMACHER und TOEPLITZ, *Von Zahlen und Figuren* (Berlin, 1930), p. 55 sq.

<sup>2</sup> On trouve une traduction allemande du mémoire en latin de Euler dans le recueil de A. SPEISER, *Klassische Stücke der Mathematik* (Zurich, 1925).

<sup>3</sup> Cf. HILBERT und COHN-VOSSEN, *l. c.*, § 51, et RADEMACHER und TOEPLITZ, *l. c.*, § 12a.

<sup>4</sup> Au sujet des surfaces unilatères, cf. HILBERT und COHN-VOSSEN, *l. c.*, § 46.

ème et nous apprendre à ranger le théorème particulier dans un cercle de théorèmes plus généraux. Ainsi la démonstration du théorème cité de Jordan <sup>1</sup> nous conduit non seulement à ses rapports avec le théorème analogue dans l'espace (tout polyèdre fermé partage l'espace) mais encore à la théorie si importante des « enlacements » des polygones fermés dans l'espace <sup>2</sup>; ces enlacements sont à leur tour en relation avec le problème beaucoup plus difficile « des nœuds »: « comment peut-on reconnaître si un polygone fermé  $P$ , donné dans l'espace, n'est pas noué, c'est-à-dire si l'on peut construire un disque polyédral limité par  $P$  qui soit l'image topologique d'un morceau de plan limité par un polygone ? » Malgré les plus grands efforts, ce problème n'est pas plus résolu que le problème des quatre couleurs, mais son importance géométrique est beaucoup plus grande <sup>3</sup>.

Tout cela fait partie de la topologie « combinatoire » ou « algébrique » (dont l'édification systématique est due à Poincaré): les figures sont formées par la combinaison d'éléments en nombre fini (segments, triangles, tétraèdres, etc.) et les méthodes sont celles de l'algèbre linéaire (matrices, groupes abéliens) <sup>4</sup>.

La topologie combinatoire doit encourir le reproche d'une certaine inconséquence (ce qui n'amointrit pas ses mérites): son matériel consiste en segments, triangles, etc. rectilignes; ses théorèmes traitent de propriétés que n'altèrent pas les transformations biunivoques et continues; or ces transformations privent en général les figures de leur caractère rectiligne; la portée des théorèmes ne peut donc pas être utilisée avec le matériel donné. Pour correspondre au contenu des théorèmes topologiques, il faudrait un stock de figures qui contienne avec une figure toutes ses images biunivoques et continues; pour être tout de suite aussi radical que possible, le champ de figures le mieux adapté serait celui de *tous les ensembles de points*.

Tel est le point de vue adopté par la topologie des ensembles. En fait, on sait, depuis la fondation de la théorie des ensembles par G. Cantor, qu'on peut émettre des jugements géométriques concrets même sur des ensembles quelconques de points. Contrairement à la manière de concevoir les figures en topologie combinatoire, les élé-

<sup>1</sup> La démonstration fut esquissée dans la conférence; elle repose sur le fait suivant:  $a$  étant un point non situé sur le polygone  $P$ , les rayons issus de  $a$  et ne passant pas par un sommet de  $P$  coupent  $P$  ou bien tous en un nombre pair de points ou bien tous en un nombre impair de points.  $a$  est dit point « extérieur » de  $P$  dans le premier cas, « intérieur » dans le second cas. On démontre: deux points  $a^1$  et  $a^2$  peuvent être unis par un chemin qui évite  $P$  s'ils sont tous les deux intérieurs ou tous les deux extérieurs, et dans ce cas seulement.

<sup>2</sup> Cf. pour une première orientation ALEXANDROFF, *Einfachste Grundbegriffe der Topologie* (Berlin, 1932), en particulier p. 2-3 et p. 46-47.

<sup>3</sup> Une monographie complète de la difficile théorie des nœuds est due à K. REIDEMEISTER, *Knotentheorie* (Berlin, 1932).

<sup>4</sup> La brochure citée (1) de ALEXANDROFF fournit une introduction à la topologie combinatoire avec des perspectives sur des questions de la géométrie des ensembles de points.

ments sont maintenant les points seuls, chaque figure en contient un nombre infini <sup>1</sup>. L'introduction des ensembles de points dans le champ des recherches, qui entraîne un enrichissement de la géométrie insoupçonné, n'a pas été provoquée seulement par les points de vue de méthode indiqués et par l'obligation de viser à une généralité aussi grande que possible, mais aussi par des problèmes d'autres disciplines mathématiques; ainsi la frontière du domaine d'existence d'une fonction analytique peut être par exemple un ensemble qui n'appartient pas au matériel de l'ancienne géométrie.

Mais cette géométrie des ensembles de points mérite aussi la qualification « élémentaire »: celle-ci ne concerne plus toutefois les figures étudiées, mais bien la *méthode* d'étude; car les raisonnements propres de la théorie des ensembles sont un outil extrêmement primitif, en comparaison duquel les méthodes géométriques classiques sont des appareils très délicats. Il est naturel que dans le domaine élargi de la géométrie, une méfiance encore plus grande qu'avant doive être réservée à l'intuition: dans le champ immense des figures se trouvent les paradoxes les plus remarquables <sup>2</sup>.

Dans cette géométrie élémentaire des ensembles, où les anciennes figures rectilignes sont privées de leur place à part, le but est le suivant: on démontre des théorèmes aussi généraux que possible, c'est-à-dire valables pour le plus grand nombre possible d'ensembles — (plus le théorème est général, plus la méthode est primitive) —, et l'on reconnaît ensuite les anciens théorèmes de géométrie élémentaire comme cas particuliers. Un exemple expliquera cette tendance; le théorème suivant a lieu: «  $F$  et  $F'$  étant deux ensembles fermés dans le plan, et  $F'$  étant une image biunivoque et continue de  $F$ , l'ensemble  $F'$  partage le plan en autant de domaines que l'ensemble  $F$ . » Ce théorème contient le théorème de Jordan non seulement pour les polygones, mais aussi pour les courbes fermées quelconques sans point double; car une telle courbe  $F'$  est en effet l'image biunivoque et continue d'une circonférence  $F$ ; et pour une circonférence, il est immédiat qu'elle partage le plan en exactement deux domaines.

Mais justement l'exemple de ce théorème montre aussi les limites auxquelles est liée la tendance de la topologie des ensembles, du moins encore aujourd'hui. Car le but visé ne serait naturellement atteint que si l'on réussissait à démontrer le théorème cité pour les ensembles par les seuls moyens de la théorie des ensembles, et à en tirer ensuite comme cas particulier le théorème relatif au polygone rectiligne à  $n$  sommets. Or on procède en fait dans l'ordre inverse: on démontre *d'abord* le théorème de Jordan (et des théorèmes un peu plus géné-

---

<sup>1</sup> Comme traité de la géométrie des ensembles, citons: K. Menger, *Kurventheorie* (Leipzig, 1933) et pour la théorie des ensembles elle-même: F. Hausdorff, *Mengenlehre* (Berlin, 1927).

<sup>2</sup> Cf. par exemple Alexandroff, *l. c.* p. 4, et Menger, *l. c.*

raux) pour les polygones, et *ensuite* on étend les connaissances ainsi obtenues, par des approximations, à des ensembles quelconques  $F$  et  $F'$ . Les théorèmes de l'ancienne géométrie élémentaire n'apparaissent donc pas seulement comme des *cas particuliers* des théorèmes de la géométrie des ensembles, mais comme leurs *bases*. Telle est dans bien des cas la situation *actuelle*, et cette constatation ne doit pas diminuer la valeur de la tendance de la topologie des ensembles. Au contraire: par l'obligation de fournir des bases à la nouvelle géométrie des ensembles, l'ancienne géométrie élémentaire a reçu un nouvel élan de vie, et l'on est arrivé à des théorèmes d'un genre nouveau, extrêmement intéressants même au point de vue de la géométrie élémentaire pure<sup>1</sup>. La valeur de la géométrie élémentaire est justement mise en pleine lumière par ses relations avec la géométrie générale des ensembles: les propriétés des figures spatiales, si compliquées soient-elles, se présentent pour la plupart le plus clairement déjà sur les figures *simples, élémentaires*.

(Traduction de M. G. DE RHAM, Dr ès sc. (Lausanne).)

---

<sup>1</sup> Un exemple est le théorème suivant de SPERNER: Soit un triangle  $D$  subdivisé en petits triangles  $d_1, d_2, \dots, d_n$  de manière que deux petits triangles ou bien n'aient aucun point commun, ou bien aient un sommet commun ou bien un côté commun; la subdivision étant par ailleurs quelconque. Supposons qu'à chaque sommet du réseau ainsi constitué corresponde l'un des chiffres 1, 2, 3 d'après la règle suivante: aux trois sommets de  $D$  correspondent les trois chiffres distincts 1, 2, 3; à chaque sommet de l'arête  $ij$  de  $D$  correspond l'un quelconque des chiffres  $i$  et  $j$  ( $ij = 12, 23, 31$ ); à chaque sommet intérieur à  $D$  correspond l'un quelconque des chiffres 1, 2, 3. Conclusion: il y a au moins un petit triangle  $d_i$  aux trois sommets duquel correspondent les trois chiffres distincts 1, 2, 3. Démonstration: *Abh. Math. Seminar Hamburg*, VI (1928).

---