

J. Favard. — Leçons sur les Fonctions presque périodiques, professées au Collège de France. Préface de M. Gaston Julia (Cahiers scientifique publiés sous la direction de M. Gaston Julia: fasc. XIII). — Un volume gr. in-8° de VIII-184 pages. Pris: 50 fra...

Autor(en): Buhl, A.

Objektyp: BookReview

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band (Jahr): 32 (1933)

Heft 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

PDF erstellt am: 26.09.2024

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

J. FAVARD. — **Leçons sur les Fonctions presque périodiques**, professées au Collège de France. Préface de M. Gaston Julia (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia; fasc. XIII). — Un volume gr. in-8° de VIII-184 pages. Pris: 50 francs. Gauthier-Villars & C^{ie}. Paris, 1933.

Encore un excellent Cours fait sous les auspices de la Fondation Peccot et dont le sujet présente de très grandes analogies avec le précédent. Les fonctions presque périodiques sont comparables aux fonctions «troublées» de la Mécanique céleste et même de la récente Mécanique ondulatoire: leur théorie correspond à des troubles particulièrement aisés à codifier. Ainsi, à une fonction presque périodique, correspond toujours une valeur moyenne, une série d'exposants de Fourier et une autre série de coefficients de Fourier telles que, d'après Hurwitz, on puisse écrire la correspondance

$$f(x) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n x} .$$

Le second membre rappelle immédiatement la série de Dirichlet avec cette différence qu'ici les choses sont manifestement préparées pour la comparaison avec les séries trigonométriques et les représentations périodiques tandis qu'avec M. Bernstein on visait plutôt à la comparaison avec les séries de Taylor. Mais les deux points de vue s'identifieront fatalement, et sous la plume de M. Favard lui-même, quand celui-ci, dans la seconde moitié de son ouvrage, en viendra aux fonctions *analytiques* presque périodiques.

A la formule ci-dessus correspond un théorème d'unicité absolument essentiel. A $f(x)$ ne correspond qu'un seul second membre. Seulement celui-ci n'approche pas toujours de $f(x)$ par quelque convergence élémentaire et directe; là encore, il faut imiter les procédés de sommation employés pour des séries divergentes correspondant à des tentatives de représentations périodiques. Signalons le rôle fort important des polynômes exponentiels. La construction de ces polynômes ne va pas sans développements sur des nombres de la forme $s_i \gamma_i$ (avec i indice de sommation). Les exposants λ_n , de f , peuvent être de la forme $m_i \beta_i$, les m étant entiers, ce qui rend f quasi-périodique au sens de Bohl et de M. Esclangon. Il est impossible de mieux préciser sans développements mais enfin on peut retenir qu'il ne faut pas confondre la presque-périodicité avec la quasi-périodicité. Il se trouve que *presque* a pris un sens plus général que *quasi*.

Un autre point, des plus importants mais que nous ne pouvons que mentionner, est celui de la *normalisation* des fonctions presque-périodiques: c'est de là que provient surtout leur maniement pratique. Elles peuvent dès lors figurer comme coefficients dans des équations différentielles et même dans des systèmes d'équations différentielles tels les systèmes linéaires, systèmes auxquels on appliquera la méthode d'intégration par approximations successives de M. Emile Picard. La Théorie de la Lune exigeait déjà des considérations de ce genre avec l'équation $z' + \Theta z = 0$ (Voir H. POINCARÉ. *Leçons de Mécanique céleste*, Tome II, Seconde partie, 1909, p. 43). Il fallut d'abord se tirer d'affaire par des procédés assez improvisés. Aujourd'hui la Théorie des fonctions presque périodiques apporte de véritables méthodes; il est naturel qu'elle ait provoqué les efforts d'un astronome comme M. Esclangon et, du côté de la Physique théorique, ceux d'un savant comme M. Weyl.

Les circonstances qui font paraître, à peu près ensemble, les ouvrages de MM. W. Bernstein et J. Favard, ne sont sans doute pas fortuites. Les deux livres sont à étudier ensemble pour qui voudra faire des comparaisons profondes et fructueuses.

A. BUHL (Toulouse).

J. SER. — **Les calculs formels des Séries de factorielles.** — Un volume gr. in-8° de VIII-100 pages. Prix: 20 francs. Gauthier-Villars & C^{ie}. Paris, 1933.

Il s'agit ici du calcul analytique aboutissant à ce que l'on appelait autrefois la belle formule. On peut croire que ce calcul a perdu du terrain et cependant il est destiné à en regagner avec les actuels progrès du symbolisme. En parcourant l'ouvrage de M. Ser j'ai successivement pensé aux *facultés analytiques* de Laplace, aux formules, toujours incomplètement étudiées peut-être, de Burmann et de Wronski, aux recherches beaucoup plus récentes de M. Nörlund sur la « somme » d'une fonction (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. 24) et enfin à tout l'arsenal hermitien qui revient au grand jour grâce aux quanta.

L'auteur part de la Série de Newton, pose

$$n! X_n = x(1-x) \dots (n-1-x)$$

et, à propos de fonctions élémentaires diverses mais de plus en plus complexes, nous fait admirer la puissance constructive de ces X_n . Ceux-ci se prêtent notamment à de certains développements directs et à d'autres dits *réciproques*. Parmi des nombres *autoréciproques* on retrouve ceux de Bernoulli rattachés à des développements en série entière et qui pourraient être rattachés aussi aux séries de puissances symboliques de la Théorie des groupes.

Un chapitre consacré aux formules sommatoires contient beaucoup de choses qui pourraient être tirées de la Théorie des résidus. Ici, on songe aux recherches de M. Lindelöf.

Si les sommes ordinaires correspondent à une opération Ωf , il y a des sommes alternées qui correspondent à $\Omega \cos \pi x f(x)$. On retrouve ici la fonction Γ et sa dérivée, des généralisations de la formule de Wallis et l'on aboutit ensuite à la notion de *faculté* que l'on sentait venir depuis longtemps. Il faut également signaler les séries de constantes dans lesquelles la constante d'Euler entre de manière très particulière.

Les fonctions eulériennes et le logarithme intégral donnent un chapitre particulièrement esthétique. Le rapprochement des séries de facultés et des séries de Newton conduit à de faciles aperçus sur l'extrapolation. Chemin faisant, nombre de séries divergentes ont été ingénieusement transformées de manière à rétablir la convergence.

Certes, je n'ai pas vérifié tous les calculs de M. Ser mais tous incitent à l'attention; on peut penser que nombre d'abstractions de la Théorie des fonctions pourraient trouver, dans ces pages, d'élégantes illustrations.

A. BUHL (Toulouse).