

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 31 (1932)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POLAIRES GÉNÉRALISÉES ET COURBES MOYENNES
Autor: Haarbleicher, André
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-24626>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Comme les séries $\sum \tau_n x^n$, $\sum \tau_{n-1} x^n$ sont absolument convergentes, les produits infinis

$$\Pi (1 - \tau_n x^n) , \quad \Pi (1 - \tau_{n-1} x^n)$$

sont aussi absolument convergents et par conséquent sont différents de zéro. On en déduit que C_n tend vers une limite finie, ce qui est en contradiction avec la condition et le théorème est démontré.

SUR LES POLAIRES GÉNÉRALISÉES ET COURBES MOYENNES

PAR

André HAARBLEICHER (Paris).

M. d'OCAGNE m'a communiqué les résultats de deux Notes¹, l'une de lui, l'autre de M. HARMEGNIES sur les courbes polaires et les courbes moyennes, et m'a demandé de rechercher l'application des coordonnées isotropes à cette étude².

Je donne ci-après cette application pour la courbe moyenne relative à deux cercles quelconques.

Soit C_1 , C_2 les deux cercles, O_1 , O_2 leurs centres, O un point quelconque par lequel on mène une sécante qui coupe le cercle C_1 en des points M_1 , le cercle C_2 en des points M_2 . Lieu du milieu M des segments de droite $M_1 M_2$ lorsque la sécante tourne autour du point O .

Prenons pour axes de coordonnées les droites isotropes passant par O . Soit

$$XY - b_1 X - a_1 Y + c_1 = 0$$

$$XY - b_2 X - a_2 Y + c_2 = 0$$

$$Y - m X = 0$$

¹ Voir *L'Ens. Math.*, t. XXXI, p. 31-49, 50-57.

² Voir: *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, par A. HAARBLEICHER (Paris, Gauthier-Villars, 1931). [N. d. l. R.]

les équations des cercles C_1, C_2 et de la sécante. Soit X_1, Y_1, X_2, Y_2, X, Y les coordonnées des points M_1, M_2, M . Les équations du problème sont

$$X_1 Y_1 - b_1 X_1 - a_1 Y_1 + C_1 = 0 \tag{1}$$

$$X_2 Y_2 - b_2 X_2 - a_2 Y_2 + C_2 = 0 \tag{2}$$

$$Y_1 - m X_1 = 0 \tag{3}$$

$$Y_2 - m X_2 = 0 \tag{4}$$

$$2 X = X_1 + X_2 \tag{5}$$

$$2 Y = Y_1 + Y_2 \tag{6}$$

L'équation du lieu s'obtient en éliminant X_1, Y_1, X_2, Y_2, m entre ces 6 équations. Des quatre dernières, on tire $m = \frac{Y}{X}$. Remplaçant dans les deux premières Y_1 par $\frac{Y}{X} X_1$ et Y_2 par $\frac{Y}{X} (2 X - X_1)$, on a

$$Y X_1^2 - (b_1 X + a_1 Y) X_1 + c_1 X = 0 \tag{7}$$

$$Y X_1^2 - (4 X Y - b_2 X - a_2 Y) X_1 + 4 X^2 Y - 2 X (b_2 X + a_2 Y) + c_2 X = 0 \tag{8}$$

L'élimination de X_1 donne

$$\begin{aligned} & XY[4 XY - 2 b_2 X - 2 a_2 Y + c_2 - c_1]^2 \\ & - (b_1 X + a_1 Y)[4 XY - 2 b_2 X - 2 a_2 Y + c_2 - c_1][4 XY - (b_1 + b_2) X \\ & - (a_1 + a_2) Y] + c_1[4 XY - (b_1 + b_2) X - (a_1 + a_2) Y]^2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

qui est l'équation du lieu. Si l'on pose

$$4 XY - (b_1 + b_2) X - (a_1 + a_2) Y = K \tag{10}$$

$$4 XY - 2 b_2 X - 2 a_2 Y + c_2 - c_1 = K_2$$

cette équation prend la forme

$$XY K^2 - (b_1 X + a_1 Y) K K_2 + c_1 K^2 = 0 \tag{10}$$

$K = 0$ et $K_2 = 0$ sont les équations de deux cercles K et K_2 .

Cette équation est du sixième degré. X et Y n'entrent pas dans l'équation à un degré supérieur à 3. Donc le lieu cherché est une courbe du sixième ordre qui a les points cycliques pour points triples.

Les termes de degré inférieur sont du second degré. Donc l'origine O est un point double. Sous la forme (10) de l'équation, on voit qu'elle a pour points doubles les points Q_1 et Q_2 d'intersection des cercles K et K_2 . Le cercle K passe par l'origine et a pour centre le point $\left(\frac{a_1 + a_2}{4}, \frac{b_1 + b_2}{4}\right)$ c'est-à-dire le milieu de la droite qui joint le point O au milieu A de $O_1 O_2$: c'est donc le cercle de diamètre OA . Les points Q_1 et Q_2 sont les points d'intersection du cercle K et de l'axe radical des cercles K et K_2 qui a pour équation

$$(b_2 - b_1)X + (a_2 - a_1)Y - c_2 + c_1 = 0 ,$$

c'est l'axe radical des cercles C_1 et C_2 d'après les équations (1) et (2).

Les équations des asymptotes, parallèles aux axes de coordonnées, s'obtiennent en annulant les coefficients de X_3 et de Y_3 dans l'équation de la courbe. Pour le coefficient de X_3 , on obtient

$$Y(4Y - 2b_2)^2 - b_1(4Y - 2b_2)(4Y - b_1 - b_2)$$

ou

$$(4Y - 2b_1)(4Y - 2b_2)\left(Y - \frac{b_1 + b_2}{2}\right) .$$

De même pour le coefficient de Y_3

$$(4X - 2a_1)(4X - 2a_2)\left(X - \frac{a_1 + a_2}{2}\right) ,$$

les asymptotes sont donc les droites d'équations

$$\begin{aligned} X - \frac{a_1}{2} = 0 , & \quad X - \frac{a_2}{2} = 0 , & \quad X - \frac{a_1 + a_2}{2} = 0 , \\ Y - \frac{b_1}{2} = 0 , & \quad Y - \frac{b_2}{2} = 0 , & \quad Y - \frac{b_1 + b_2}{2} = 0 , \end{aligned}$$

ce sont les droites isotropes qui passent par les milieux des côtés du triangle $OO_1 O_2$.

Le lieu cherché est donc une courbe du sixième ordre qui a pour points triples les points cycliques, pour points doubles le point O et les points Q_1, Q_2 d'intersection de l'axe radical des cercles $C_1,$

et C_2 avec le cercle K de diamètre OA , A étant le milieu de $O_1 O_2$. Elle a pour foyers doubles les milieux A, B, C des côtés du triangle $OO_1 O_2$.

En général, cette courbe n'est pas une courbe des trois barres. Pour qu'elle le soit, il faut et suffit que les triangles $OQ_1 Q_2$ et ABC soient inscrits dans un même cercle et circonscrits à une même parabole.

Le cercle K passe par les points O, Q_1, Q_2, A . Le point B $\left(\frac{a_1}{2}, \frac{b_1}{2}\right)$ est sur ce cercle si

$$a_1 b_1 - (b_1 + b_2) \frac{a_1}{2} - (a_1 + a_2) \frac{b_1}{2} = 0,$$

ou

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$$

$$\frac{b_1}{a_1} = - \frac{b_2}{a_2},$$

c'est-à-dire si les droites OO_1 et OO_2 sont rectangulaires. La même condition exprime que le point C est sur le cercle.

Elle exprime aussi que les triangles $OQ_1 Q_2$ et ABC sont circonscrits à une même parabole. Le quadrilatère $ABOC$ est alors un rectangle et la droite $Q_1 Q_2$, axe radical des cercles C_1 et C_2 est perpendiculaire à BC , parallèle à $O_1 O_2$. Je dis qu'étant donné un rectangle $ABOC$ et une corde du cercle circonscrit $Q_1 Q_2$ quelconque perpendiculaire à la diagonale BC , les triangles ABC et $OQ_1 Q_2$ sont circonscrits à une même parabole. Prenons pour origine des coordonnées isotropes le centre du cercle. Soit

$$\alpha, \frac{1}{\alpha}, \beta, \frac{1}{\beta} - \beta, -\frac{1}{\beta}, -\alpha, -\frac{1}{\alpha}, z_1, \frac{1}{z_1}, z_2, \frac{1}{z_2},$$

les coordonnées des points A, B, C, O, Q_1, Q_2 . Il faut démontrer que les produits des abscisses des sommets des deux triangles sont égaux.

$$-\alpha \beta^2 = -\alpha z_1 z_2$$

ou

$$\beta^2 = z_1 z_2. \tag{11}$$

Or le coefficient angulaire de BC est $\frac{1}{\beta^2}$; celui de $Q_1 Q_2$,

$$\frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{z_1 - z_2}$$

ou $-\frac{1}{z_1 z_2}$. La condition de perpendicularité de BC et $Q_1 Q_2$ est donc

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{z_1 z_2},$$

égalité identique à l'égalité (11).

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que le lieu soit une courbe des trois barres est que le point O soit sur le cercle de diamètre $O_1 O_2$.

La polaire généralisée du point O par rapport aux cercles (M_1) et (M_2) inverses de C_1 et C_2 , O étant le centre d'inversion, 1 la puissance d'inversion, est la quartique circulaire d'équation.

$$\begin{aligned} & [4 - 2b_2 X - 2a_2 Y + (c_2 - c_1) XY]^2 \\ & - (b_1 X + a_1 Y) [4 - 2b_2 X - 2a_2 Y \\ & + (c_2 - c_1) XY] [4 - (b_1 + b_2) X - (a_1 + a_2) Y] \\ & + c_1 XY [4 - (b_1 + b_2) X - (a_1 + a_2) Y]^2 = 0. \end{aligned}$$