SUR L'IDÉE D'ENSEMBLE D'ACCUMULATION

SUR L'IDÉE D'ENSEMBLE D'ACCUMULATION

PAR

Georges BOULIGAND.

1. — Dans sa célèbre thèse: *Sur les continus irréductibles entre deux points* (Paris, 1911), l'éminent géomètre S. Janiszewski a posé les définitions suivantes:

Etant donnée une collection infinie d'ensembles ponctuels, on dit qu'un point M appartient à l'*ensemble limite* de cette collection, si, quelle que soit la longueur ε, la collection n'enferme qu'un nombre fini d'ensembles distants de M de plus de ε; et l'on dit que M appartient à l'ensemble d'*accumulation*, si, pour chaque longueur ε, la collection renferme une infinité d'ensembles distants de M de moins de ε.

Ces définitions de l'ensemble limite et de l'ensemble d'accumulation sont très utiles pour les problèmes de topologie considérés par S. Janiszewski. Mais elles ne sont pas les seules possibles. A côté de l'ensemble limite défini comme ci-dessus, on peut définir l'ensemble limite complet ou restreint, au sens de M. Emile Borel: on part alors de conditions d'appartenance, et les relations de voisinage sont étrangères à ce mode de définition: c'est à ce point de vue que s'est placé M. de la Vallée-Poussin dans son ouvrage *Fonctions d'ensembles, intégrales de Lebesgue, classes de Baire*[1]. Même au point de vue de la topologie, la définition donnée par S. Janiszewski n'est pas la seule possible: pour une suite d'ensembles, M. Florin Vasilesco a donné, dans sa belle thèse sur les fonctions multiformes, une nouvelle conception de la notion d'ensemble limite[2]. Et l'on peut en dire

[1] N° 10, p. 9.
[2] Thèse, Paris 1925, p. 6 et suivantes.

qu'elle se présente comme la généralisation la plus naturelle de la notion de limite, pour le cas usuel d'une suite de nombres: elle se base en effet sur la notion d'*écart* de deux ensembles; celle-ci ayant été définie, les relations

$$E = \lim E_n \qquad \lim_{n \to \infty} \text{écart}\,(E_n\,,\ E) = 0$$

s'équivalent (alors même que le mot limite est appliqué, dans l'une, à une suite d'ensembles, et dans l'autre, à une suite de nombres).

L'idée d'ensemble limite au sens de Vasilesco et celle d'ensemble limite au sens de Janiszewski sont différentes. MM. G. Durand et G. Rabaté en ont déterminé les relations dans une note récente [1]. A mon sens, l'expression même d'*ensemble limite* convient mieux à la notion envisagée par M. Fl. Vasilesco, et l'ensemble limite considéré par Janiszewski, défini point par point, serait mieux dénommé: *ensemble des points de convergence.*

2. — Quoiqu'il en soit, c'est uniquement le sens de la locution, *ensemble d'accumulation*, qui va nous occuper ici. Nous avons déjà fait connaître, en cette matière, le point de vue de S. Janiszewski, lorsqu'il définit l'ensemble d'accumulation d'une collection infinie d'ensembles, envisagée d'une manière absolue.

Nous allons maintenant montrer qu'en raison même d'habitudes acquises, d'autres sens sont possibles. Considérons une fonction $f(x)$; supposons-la, pour simplifier, bornée, et définie en chaque point d'un intervalle fermé (a, b). Soit x_0 une valeur de cet intervalle. Pour étudier $f(x)$ autour de la valeur x_0, il importe de connaître l'ensemble des valeurs λ qui sont des limites de valeurs $f(x + h_i)$, où h_i est le terme général de quelque suite évanescente choisie de manière que $f(x + h_i)$ tende vers une limite. Etant donnée la terminologie mathématique actuelle, il est assez naturel de dire de l'ensemble des λ qu'il est l'*ensemble des valeurs d'accumulation* de $f(x)$ autour de x_0.

Plus généralement, supposons qu'à chaque point M d'un espace euclidien, ou d'un certain ensemble de cet espace, on fasse correspondre, suivant une loi géométrique préalablement

[1] *C. R.*, t. 192 (23 févr. 1931), p. 474.

donnée, un certain élément $\Pi(M)$. Dans certaines recherches, il peut être intéressant de considérer l'*ensemble des éléments d'accumulation* des divers $\Pi(M)$ autour d'un certain point O. Bien souvent, on est tenté, abrégeant le langage, de dire ici, sans plus: ensemble d'accumulation. Et cela n'a pas d'inconvénient grave, si l'on a préalablement bien marqué la différence essentielle qui existe entre cette nouvelle notion et celle de Janiszewski, citée précédemment. Au lieu de considérer, avec Janiszewski, une collection infinie d'ensembles, on étudie maintenant un élément géométrique en dépendance d'un point.

3. — Cet élément géométrique, jouant le rôle de fonction généralisée, peut lui-même être un ensemble; et, dans ces conditions, la question se présente ainsi:

> *Définir l'ensemble des éléments d'accumulation de certains ensembles attachés aux points* M *d'un ensemble* E, *lorsque ces points* M *deviennent infiniment voisins d'un certain point* O;

ou en abrégé:

> Définir *l'ensemble d'accumulation au point* O *des ensembles* $\Pi(M)$ *attachés aux points* M *de* E.

Dans un tel énoncé, la présence des mots « *au point* O » suffit à impliquer que la définition actuellement mise en jeu, pour l'ensemble d'accumulation, est la définition relative à l'idée de correspondance, et basée sur l'examen des propriétés de cette correspondance au voisinage du point O.

4. — Pour donner un exemple de ces considérations, supposons que M soit un point du dérivé E' d'un certain ensemble ponctuel E; nous partons donc de E', et à chaque point M de cet ensemble, nous faisons correspondre le paratingent $\Pi(M)$ de l'ensemble E au point M [1].

[1] Dire qu'une droite MD issue de M appartient à $\Pi(M)$ signifie: à tout angle $\omega > 0$, correspond une suite infinie de cordes $R_i S_i$ ayant pour extrémités des points de E qui tendent vers M lorsque i croit indéfiniment, et cela de manière que le plus petit des angles géométriques de $R_i S_i$ et MD soit moindre que ω. En substituant, dans cette définition, aux cordes $R_i S_i$ des divisions rectilignes formées de $n+1$ points tendant vers M, on obtiendrait le *paratingent de rang n*.

Soit O un point du second dérivé E″. Il est donc point d'accumulation de points M de E′. Je considère l'ensemble d'accumulation au point O des paratingents $\Pi(M)$ en des points M infiniment voisins de O: nous nous plaçons donc ici au point de vue du numéro 3. Dire qu'une droite Δ issue de O appartient à cet ensemble d'accumulation signifiera qu'il existe dans E′ au moins une suite de points M_i tendant vers O, et telle que les plus courtes distances angulaires entre Δ d'une part, les $\Pi(M_i)$ d'autre part, tendent vers zéro.

C'est dans ce sens que nous allons pouvoir établir le théorème suivant, dont M. G. Rabaté a bien voulu signaler l'énoncé dans sa thèse de doctorat [1]:

Le paratingent d'un ensemble en un point O *de son second dérivé contient l'ensemble d'accumulation au point* O *des paratingents de* E *aux points de* E′ *infiniment voisins de* O.

Soit en effet une droite $O\Delta$ de cet ensemble d'accumulation: il existe, par hypothèse, dans E′, une suite de points M_i tendant vers O, et telle que les plus courtes distances angulaires entre Δ d'une part, les $\Pi(M_i)$ d'autre part, tendent vers zéro; on peut dire encore: chaque $\Pi(M_i)$ contient une droite $M_i\Delta_i$ faisant avec Δ un angle infiniment petit. On est donc conduit à montrer que si Δ est la limite de droites Δ_i, issues respectivement de points M_i infiniment voisins de O et provenant des $\Pi(M_i)$, cette droite Δ appartient à $\Pi(O)$.

Soit en effet un angle positif quelconque ω. Je puis lui faire correspondre un entier j tel que l'inégalité

$$i > j$$

entraîne l'inégalité

$$(\widehat{\Delta, \Delta_i}) < \omega$$

(le premier membre désignant le plus petit des deux angles *géométriques* supplémentaires de Δ et Δ_i). Cela posé, à Δ_i peut

[1] *Sur les opérations originelles de la Géométrie Infinitésimale Directe,* Toulouse 1931, n° 17*bis*, p. 15. C'est à la suite d'une demande de M. Rabaté, de préciser le sens donné à la locution *ensemble d'accumulation* dans cet énoncé, que j'ai été conduit à écrire le présent article. Dans un livre en préparation *(Introduction à la Géométrie Infinitésimule Directe)* j'ai donné du même théorème cet autre énoncé: *Le paratingent possède la semi-continuité supérieure d'inclusion.* Et cela s'applique aux paratingents de tout rang.

s'associer une corde R_iS_i dont les extrémités font partie de E et sont distantes de M_i de moins de OM_i; telle aussi que

$$(\widehat{R_iS_i, \Delta_i}) < \omega$$

Finalement, pour chaque ω, il existe une suite de cordes R_iS_i d'extrémités infiniment voisines de O (car, à une distance $< 2\,OM_i$) et inclinées sur Δ de moins de $2\,\omega$. Donc, par définition, $O\Delta$ fait partie du paratingent en O. (C.Q.F.D.)

5. — Si, dans l'énoncé précédent, l'on essayait de substituer au mot paratingent le mot contingent, il est aisé de voir que l'énoncé deviendrait inexact. Le théorème du nº 4 a d'ailleurs la plus grande importance.

M. G. Rabaté et moi-même avions rencontré, dans nos recherches, d'une manière indépendante, les continus de l'espace à trois dimensions, dont le paratingent laisse échapper toutes les droites d'un plan. Ces continus sont des réunions d'arcs, en nombre fini, dont chacun, après choix d'un trièdre convenable, peut se représenter sous la forme

$$y = f(x) \qquad z = g(x)$$

M. G. Rabaté a considéré plus spécialement les continus dont le paratingent est partout formé d'une droite unique. Mon théorème du nº 4 implique immédiatement que ces continus sont des courbes à tangentes continues[1], propriété que M. G. Rabaté a démontrée dans sa thèse et qui a été utilisée par M. G. Durand dans la sienne, sur une généralisation des surfaces convexes[2].

---

[1] Plus généralement, si $\Pi(M)$ possède la semi-continuité supérieure d'inclusion, sa réduction à un élément unique entraine la continuité de dépendance de cet élément vis-à-vis de M.

[2] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1931 fasc. IV.