

2. — Volumes a parois coniques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. — VOLUMES A PAROIS CONIQUES.

§ 8. — *Expression générale.* — Substituons au cylindre un cône et calculons ΣV_i .

Soient M_i, m les points de Σ_i et de σ sur une même droite issue du sommet du cône,

$$\varrho_i = \frac{\overline{OM}_i}{Om} ,$$

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s) .

Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle ayant pour sommet celui du cône; il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int \frac{1}{3} (\Sigma \varrho_i^3) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma \\ \text{avec} \\ F(\varrho_i x, \varrho_i y, \varrho_i z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs F par rapport aux puissances décroissantes de XYZ ,

$$F \equiv \Phi_m(X, Y, Z) + \Phi_{m-1}(X, Y, Z) + \Phi_{m-2}(X, Y, Z) + \dots + \Phi_0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = \frac{1}{3} \int_{\sigma} \int \left(-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \frac{\Phi_{m-1} \Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3 \frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma$$

(4)

§ 9. — Tout d'abord, la parenthèse

$$-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3 \dots - 3 \dots ,$$

étant homogène et d'ordre — 3, peut être égalée à la somme

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} ;$$

dès lors, c désignant le contour de σ ,

$$\Sigma V_i = \int_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix} .$$

D'autre part, toute modification laissant invariante la même parenthèse n'altère point ΣV_i , et ceci permet un grand nombre d'associations entre surfaces (S); en particulier, si

$$\Phi_{m-1}^3 - 3\Phi_m \Phi_{m-1} \Phi_{m-2} + 3\Phi_m^2 \Phi_{m-3} = 0 ,$$

les sommes précédentes sont nulles.

Nous n'aborderons pas le développement de ces questions; M. A. Buhl a défriché ce terrain dans les quatrième et cinquième Mémoires précités ¹.

§ 10. — Lorsque σ appartient à la surface (s_0) d'équation

$$\frac{1}{m} \left(-\frac{\Phi_{m-1}^3}{\Phi_m^3} + 3\frac{\Phi_{m-1}\Phi_{m-2}}{\Phi_m^2} - 3\frac{\Phi_{m-3}}{\Phi_m} \right) = 1 ,$$

ou

$$m\Phi_m^3 + 3\Phi_m^2\Phi_{m-3} - 3\Phi_m\Phi_{m-1}\Phi_{m-2} + \Phi_{m-1}^3 = 0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = m \int_{\sigma} \int \frac{1}{3} (\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma ;$$

les volumes V_i ont donc pour moyenne arithmétique le volume conique de même nature que limite la cloison σ ; cette surface (s_0) est généralement de degré $3m$.

§ 11. — *Volume cylindro-conique.* — Prenons pour (S) un cylindre circulaire dont nous pouvons toujours prendre l'équation sous la forme

$$F \equiv (X - a)^2 + Y^2 - R^2 = 0 .$$

¹ Pages 317-327; 195-204. Voir aussi *Géom. et Analyse Int. doubles*, pp. 8 et 30.

En cette hypothèse

$$\Phi_m \equiv x^2 + y^2 ,$$

$$\Phi_{m-1} \equiv - 2ax ,$$

$$\Phi_{m-2} \equiv a^2 - R^2 ,$$

$$\Phi_{m-3} \equiv 0 ;$$

(s₀) a donc pour équation

$$2(x^2 + y^2)^3 + 6(x^2 + y^2)ax(a^2 - R^2) - 8a^3x^3 = 0 ,$$

soit finalement ¹

$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 .$$

C'est un cylindre dont la base, sextique tricirculaire, possède au sommet du cône un point triple.

1° $a > R$ (sommet du cône intérieur au cylindre).

Les trois branches passant à l'origine sont réelles, les tangentes en ce point ayant pour coefficients angulaires respectifs

$$\infty , \quad \pm \sqrt{\frac{a^2 + 3R^2}{3(a^2 - R^2)}} .$$

La courbe rencontre $x'x$ au point d'abscisse

$$\sqrt[3]{a(a^2 + 3R^2)} ;$$

ce point est du reste intérieur à la circonférence directrice

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0 .$$

¹ En coordonnées polaires

$$\rho^3 = a[3R^2 \cos \theta + a^2 \cos 3\theta] .$$

Les valeurs maximum et minimum de ρ sont acquises pour

$$\theta = 0$$

et, pour

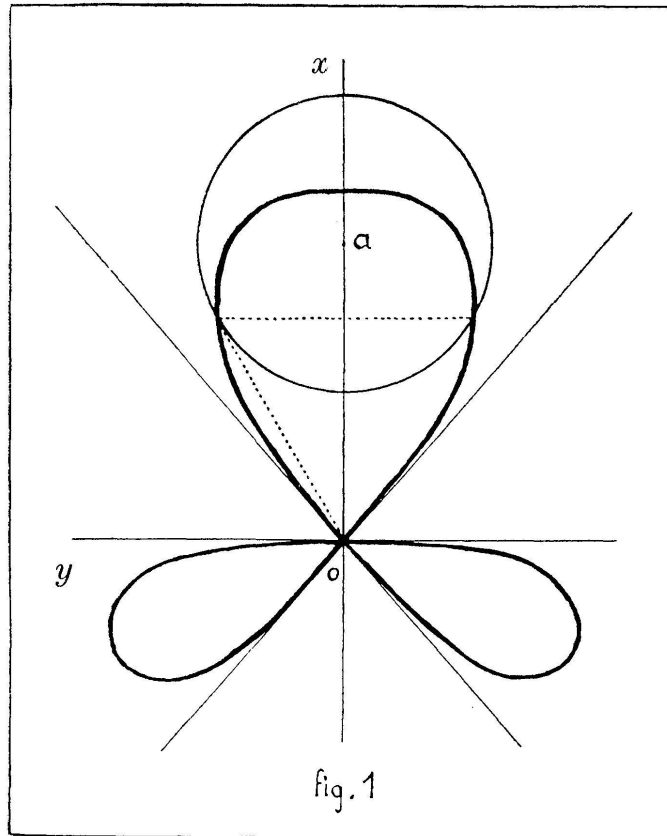
$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3a^2 + R^2}}{2a} \quad \text{et alors} \quad \rho = -\sqrt{a^2 - R^2} ,$$

avec

$$a > R .$$

Enfin, sextique et circonférence se coupent aux points de coordonnées (fig. 1)

$$\left(a - \frac{R^2}{a}, \quad \pm \frac{R}{a} \sqrt{a^2 - R^2} \right).$$



2. $a < R$ (sommet du cône intérieur au cylindre).

La branche tangente en 0 à l'axe $y'y$ est seule réelle; la sextique est intérieure à la circonférence (fig. 2).

§12. — *Volume sphéro-conique.* — Prenons pour (S) la sphère d'équation

$$(X - a)^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0 ;$$

l'équation de (s_0) s'obtient en substituant $y^2 + z^2$ à y^2 dans les calculs du paragraphe précédent; soit.

$$(x^2 + r^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)r^2] = 0$$

avec

$$r^2 = y^2 + z^2 .$$

Ainsi (s_0) n'est autre que la surface de révolution d'axe $x'Ox$ ayant pour méridienne la sextique déjà étudiée.

§ 13. — Si, en résumé, nous associons à la circonférence

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

la sextique

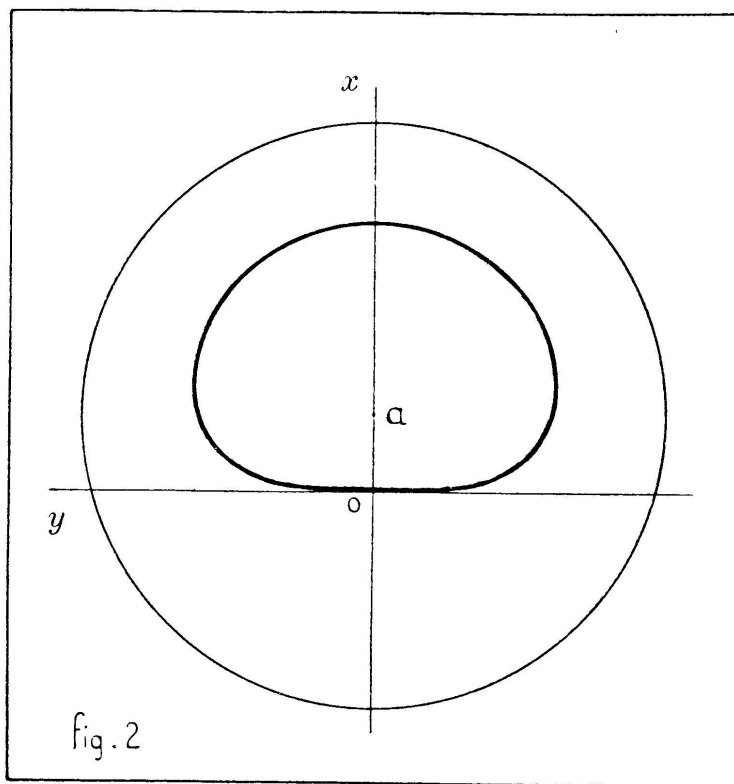
$$(x^2 + y^2)^3 - ax[(a^2 + 3R^2)x^2 - 3(a^2 - R^2)y^2] = 0 ,$$

un cône de sommet O découpe :

1° Sur les cylindres droits admettant ces courbes pour directrices,

2° Sur les surfaces d'axe Ox admettant ces courbes pour méridiennes

des cloisons Σ_1 et Σ_2 d'une part, une cloison σ d'autre part, telles que le dernier volume conique soit la moyenne des deux premiers.



§ 14. — Pour les surfaces (S) de révolution

$$az^2 + br^2 - 1 = 0 ,$$

$$(z^2 + r^2)^2 - (a^2 z^2 \pm b^2 r^2) = 0 ,$$

$$(z^2 + r^2 - 2ar)^2 - b^2(z^2 + r^2) = 0 ,$$

à méridienne conique, ovale de Cassini, limaçon de Pascal, les surfaces (s_0) sont les mêmes :

$$(z^2 + r^2)^3 - z(Az^2 + Br^2) = 0 .$$

De là une association possible de méridiennes fort différentes; nous n'insisterons pas sur la détermination de ces méridiennes associées.

3. — VOLUMES A PAROIS CONOÏDALES.

§ 15. — *Expression générale.* — Substituons enfin au cylindre un conoïde droit et calculons ΣV_i .

Soient, l'axe conoïdal étant confondu avec $z'z$, μ , M_i , m les points de $z'z$, de Σ_i et de σ sur une même parallèle au plan xOy

$$\rho_i = \frac{\overline{\mu M_i}}{\mu m} ,$$

α , β , γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s) .

Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int \frac{1}{2} (\Sigma \rho_i^2) (\alpha x + \beta y) d\sigma , \\ \text{avec} \\ F(\rho_i x, \rho_i y, z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs F par rapport aux puissances décroissantes de XY ,

$$F \equiv \Lambda_q(X, Y, Z) + \Lambda_{q-1} + \dots$$

Λ_i étant homogène et de degré i en XY , il vient

$$\Sigma V_i = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \int \left(\frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} \right) (\alpha x + \beta y) d\sigma \quad (5)$$

§ 16. — Posons

$$\Lambda = \frac{\Lambda_{q-1}^2}{\Lambda_q^2} - 2 \frac{\Lambda_{q-2}}{\Lambda_q} ;$$