

# 1. Volumes a parois cylindriques.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR CERTAINS VOLUMES ALGÈBRIQUES

PAR

Pierre PAPILLON, Prof. au Lycée (Mulhouse).

---

§ 1. — A diverses reprises <sup>1</sup>, G. HUMBERT appliquait à la Géométrie le théorème d'Abel, calculant, entre temps <sup>2</sup>, quelques aires sphériques; vingt ans après <sup>3</sup>, M. A. BUHL était amené à reprendre ces questions et les complétait par de fort intéressantes recherches sur les volumes.

Nous nous proposons d'étudier systématiquement ces sommes abéliennes de volumes à parois latérales cylindriques, coniques ou conoïdales; de curieuses associations se découvrent ainsi entre la sphère, par exemple, et des surfaces d'apparences très différentes, voire même entre des courbes planes.

Nombreux sont les développements auxquels se prêtent les formules générales; mais peut-être serait-il fastidieux, et partant maladroit, d'en user indéfiniment.

## 1. VOLUMES A PAROIS CYLINDRIQUES.

§ 2. — *Expression générale.* — Une cloison  $\sigma$  étant prise sur une surface  $(s)$ , un cylindre de base  $\sigma$  découpe sur une surface algébrique  $(S)$ , sans relation nécessaire avec  $(s)$ , un certain nombre de plages  $\Sigma_i$  qui limitent, avec un plan de section droite  $(P)$ , autant de volumes  $V_i$ ; proposons-nous d'évaluer la somme  $\Sigma V_i$ .

---

<sup>1</sup> *Journal de Mathématiques*, 4<sup>me</sup> série: tomes III (1887), V (1889) et VI (1890).

<sup>2</sup> 1888.

<sup>3</sup> *Annales de la Faculté de Toulouse*, 3<sup>me</sup> série: tomes II, VI et VII.

Soient  $\mu$ ,  $M_i$ ,  $m$  les points de (P),  $\Sigma_i$  et  $\sigma$  sur une même normale au plan de base,

$$\rho_i = \frac{\overline{PM_i}}{\overline{Pm}} ,$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les cosinus directeurs de la normale en  $m$  à (s), enfin

$$F(X, Y, Z) = 0$$

l'équation, algébrique, de (S).

1. Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle dont la face  $xOy$  coïncide avec (P).

Il est évident que

$$\Sigma V_i = \int_{\sigma} \int (\Sigma Z_i) \gamma d\sigma ,$$

avec,  $(x, y, z)$  désignant les coordonnées de  $m$ ,

$$Z_i = \rho_i \cdot z ,$$

$$F(x, y, \rho_i z) = 0 .$$

Bref

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int (\Sigma \rho_i) z \gamma d\sigma , \\ \text{avec} \\ F(x, y, \rho_i z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs le polynôme entier  $F$  par rapport aux puissances décroissantes de  $Z$ ,

$$F \equiv Z^p \varphi(X, Y) + Z^{p-1} \psi(X, Y) + Z^{p-2} \Theta(X, Y) + \dots$$

il vient

$$\Sigma V_i = \int_{\sigma} \int - \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \gamma d\sigma \quad (1)$$

2. Dans le cas général où le plan (P) admet pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - d = 0 ,$$

$\lambda, \mu, \nu$ , désignant des cosinus directeurs,

$$\begin{aligned} V_i &= \int_{\sigma} \int \overline{PM}_i (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma . \\ &= \int_{\sigma} \int \rho_i \cdot \overline{Pm} (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma . \end{aligned}$$

Or

$$\overline{Pm} = \lambda x + \mu y + \nu z - d$$

et

$$X_i = x + \lambda (\rho_i - 1) (\lambda x + \mu y + \nu z - d) ,$$

$$Y_i = y + \mu (\dots) (\dots) ,$$

$$Z_i = z + \nu (\dots) (\dots) ,$$

$$F(X_i, Y_i, Z_i) = 0 .$$

Bref

$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \int_{\sigma} \int (\Sigma \rho_i) (\lambda x + \mu y + \nu z - d) (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma \\ \text{avec} \\ F(x + \lambda \dots, y + \mu \dots, z + \nu \dots) = 0 \end{array} \right.$	(2)
---	-----

§ 3. — Reprenons l'expression (1). Les cloisons  $\Sigma_i$  étant au nombre de  $p$ , si  $\sigma$  se trouve située sur la surface  $(s_0)$  d'équation

$$- \frac{\psi(x, y)}{p\varphi(x, y)} = z ,$$

ou

$$pz\varphi(x, y) + \psi(x, y) = 0 ,$$

il vient

$$\begin{aligned} \Sigma V_i &= \int_{\sigma} \int pz \gamma d\sigma \\ &= p \int_{\sigma} \int z \gamma d\sigma ; \end{aligned}$$

les volumes  $V_i$  ont donc pour moyenne arithmétique le volume cylindrique de même nature que limite la cloison  $\sigma$ .

A (S) se trouve donc associée la surface  $(s_0)$  particulière: lieu du point de coordonnées  $\left(x, y, \frac{\sum Z_i}{p}\right)$ , c'est-à-dire du barycentre des points  $M_i$  isomassifs — centre des moyennes distances —; c'est la surface conjuguée de la direction  $z'z$  relative à la surface donnée. De là ce théorème qui lie simplement celui d'Abel à la théorie des polaires:

*Les volumes que détermine un cylindre sur une surface algébrique ont pour moyenne arithmétique celui que ce même cylindre découpe sur la surface conjuguée de la direction des génératrices relativement à la surface donnée.*

Lorsqu'en particulier le coefficient  $\psi(x, y)$  est nul — il en est ainsi, en particulier, quand  $xOy$  est un plan de symétrie pour (S) — la somme abélienne l'est également: la surface conjuguée est le plan  $xOy$ .

Plus généralement, si

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{ax + by - h}{c}$$

la surface conjuguée est plane et le volume moyen est celui d'un tronc cylindrique élémentaire; les surfaces (S) ont pour équation

$$Z^p (aX + bY + cZ - h)\varphi(X, Y) + Z^{p-2}\Theta(X, Y) + \dots = 0.$$

§ 4. — *Cas des quadriques.* — Si, dans l'équation précédente,  $p = 2$ , nous obtenons pour surfaces (S) les quadriques; directement, à l'aide de

$$AX^2 + \dots + 2BXY + \dots + 2CX + \dots + D = 0,$$

il vient

$$\varphi \equiv A'' ,$$

$$\psi \equiv 2(B'x + By + C'') :$$

l'équation de  $(s_0)$ ,

$$B'x + By + A''z + C'' = 0 ,$$

est celle du plan diamétral conjugué de la direction  $z'z$ :

*Les volumes que détermine un cylindre sur une quadrique ont pour moyenne arithmétique celui que ce même cylindre découpe sur le plan diamétral conjugué de la direction des génératrices.*

§ 5. — *Cas des cyclides.* — Prenons les cyclides d'équation

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 4h(AX^2 + BY^2 + CZ^2) - 4k^2(aX + bY + cZ) \pm l^4 = 0 .$$

Pour utiliser l'expression (2), formons l'équation en  $\rho$

$$\rho^4(\lambda x + \mu y + \nu z - d) + 4d\rho(\lambda x + \dots - d)^3 + \dots ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \Sigma V_i &= 4 \int_{\sigma} \int -d(\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma ; \\ &= -4d \int_{\sigma} \int (\lambda x + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma ; \end{aligned}$$

le volume moyen est celui que le même cylindre découpe sur le plan de base et le plan "parallèle mené par l'origine. Ce résultat remarquable est celui que donnerait une sphère centrée à cette origine.

§ 6. — Il est immédiat de constater que la surface ( $s_0$ ) ne dépend pas du plan (P): lui substituer, en effet, un plan (P') revient à ajouter ou à retrancher à  $V_i$  le volume d'un tronc cylindrique, donc à la moyenne  $\frac{\Sigma V_i}{p}$  ce même volume.

§ 7. — *Noyau cylindrique.* — Analogue à la question des sommes abéliennes est celle des noyaux cylindriques, relative aux surfaces (S)

$$Z^2\varphi(X, Y) + Z\psi(X, Y) + \Theta(X, Y) = 0 .$$

Le volume de ce noyau, dont les génératrices sont parallèles à  $z'z$ , a pour expression

$$N = \int_{\sigma} \int |\varrho_2 - \varrho_1| z\gamma d\sigma .$$

Et comme

$$|\varrho_2 - \varrho_1| = \sqrt{\left(\frac{z\psi}{z^2\varphi}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\Theta}{z^2\varphi}} .$$

il vient

$$N = \int_{\sigma} \int \frac{\sqrt{\psi^2 - 4\varphi(\Theta)}}{\varphi} \gamma d\sigma \quad (3)$$

Si l'on trace  $\sigma$  sur la surface  $(s_1)$  d'équation

$$\frac{\sqrt{\psi^2 - 4\varphi(\Theta)}}{\varphi} = z ,$$

ou

$$z^2 \varphi^2(x, y) + 4\varphi \cdot \Theta - \psi^2 = 0 ,$$

le volume du noyau est celui du cylindre de même nature que limite  $(s_1)$ . Ici (P) ne joue aucun rôle.

Considérons alors une quadrique à centre; rapportons-la au diamètre parallèle aux génératrices du cylindre et au plan conjugué<sup>1</sup>, en sorte que son équation s'écrive

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + \varepsilon = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1) .$$

Ici

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv A'' , & \psi &\equiv 0 , \\ \Theta &\equiv Ax^2 + A'y^2 + \varepsilon , \end{aligned}$$

et  $(s_1)$  a pour équation

$$z^2 \cdot A''^2 + 4A''(Ax^2 + A'y^2 + \varepsilon) = 0 ,$$

ou

$$Ax^2 + A'y^2 + \frac{A''}{4} z^2 \frac{A''}{4} z^2 + \varepsilon = 0 ;$$

c'est la transformée de la quadrique (S) par la dilatation  $\mathcal{O}(xOy, z'z, 2)$ .

En particulier, à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

correspond l'ellipsoïde de révolution allongé

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{4R^2} - 1 = 0 .$$

<sup>1</sup> Les axes de coordonnées ne sont plus rectangulaires; mais les intégrales donnent des expressions proportionnelles aux volumes.