1. Volumes a parois cylindriques.

SUR CERTAINS VOLUMES ALGÉBRIQUES

PAR

Pierre PAPILLON, Prof. au Lycée (Mulhouse).

§ 1. — A diverses reprises [1], G. HUMBERT appliquait à la Géométrie le théorème d'Abel, calculant, entre temps [2], quelques aires sphériques; vingt ans après [3], M. A. BUHL était amené à reprendre ces questions et les complétait par de fort intéressantes recherches sur les volumes.

Nous nous proposons d'étudier systématiquement ces sommes abéliennes de volumes à parois latérales cylindriques, coniques ou conoïdales; de curieuses associations se découvrent ainsi entre la sphère, par exemple, et des surfaces d'apparences très différentes, voire même entre des courbes planes.

Nombreux sont les développements auxquels se prêtent les formules générales; mais peut-être serait-il fastidieux, et partant maladroit, d'en user indéfiniment.

1. VOLUMES A PAROIS CYLINDRIQUES.

§ 2. — *Expression générale.* — Une cloison σ étant prise sur une surface (s), un cylindre de base σ découpe sur une surface algébrique (S), sans relation nécessaire avec (s), un certain nombre de plages Σ_i qui limitent, avec un plan de section droite (P), autant de volumes V_i; proposons-nous d'évaluer la somme ΣV_i.

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 4me série: tomes III (1887), V (1889) et VI (1890).
[2] 1888.
[3] *Annales de la Faculté de Toulouse*, 3me série: tomes II, VI et VII.

Soient μ, M_i, m les points de (P), Σ_i et σ sur une même normale au plan de base,

$$\rho_i = \frac{\overline{PM_i}}{\overline{Pm}} ,$$

α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en m à (s), enfin

$$F(X, Y, Z) = 0$$

l'équation, algébrique, de (S).

1. Rapportons l'espace à un trièdre trirectangle dont la face xOy coïncide avec (P).

Il est évident que

$$\Sigma V_i = \iint_\sigma (\Sigma Z_i) \gamma \, d\sigma ,$$

avec, (x, y, z) désignant les cordoonnées de m,

$$Z_i = \rho_i \cdot z ,$$
$$F(x, y, \rho_i z) = 0 .$$

Bref

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma V_i = \displaystyle\iint_\sigma (\Sigma \rho_i) z \gamma \, d\sigma , \\ \text{avec} \\ F(x, y, \rho_i z) = 0 . \end{array} \right.$$

Si l'on ordonne d'ailleurs le polynôme entier F par rapport aux puissances décroissantes de Z,

$$F \equiv Z^p \varphi(X, Y) + Z^{p-1} \psi(X, Y) + Z^{p-2} \Theta(X, Y) + \dots$$

il vient

$$\boxed{\Sigma V_i = \iint_\sigma - \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \gamma \, d\sigma} \qquad (1)$$

2. Dans le cas général où le plan (P) admet pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - d = 0 ,$$

λ, μ, ν, désignant des cosinus directeurs,

$$V_i = \iint_\sigma \overline{PM}_i (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\, d\sigma .$$

$$= \iint_\sigma \rho_i \cdot \overline{Pm} (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\, d\sigma .$$

Or

$$\overline{Pm} = \lambda x + \mu y + \nu z - d$$

et

$$X_i = x + \lambda(\rho_i - 1)(\lambda x + \mu y + \nu z - d) ,$$

$$Y_i = y + \mu(\ldots \quad)(\ldots \qquad) ,$$

$$Z_i = z + \nu(\ldots \quad)(\ldots \qquad) ,$$

$$F(X_i , Y_i , Z_i) = 0 .$$

Bref

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} &\Sigma V_i = \iint_\sigma (\Sigma\rho_i)(\lambda x + \mu y + \nu z - d)(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\, d\sigma \\ &\text{avec} \\ &F(x + \lambda \ldots ,\ y + \mu \ldots ,\ z + \nu \ldots) = 0 \end{aligned}\right.} \qquad (2)$$

§ 3. — Reprenons l'expression (1). Les cloisons Σ_i étant au nombre de p, si σ se trouve située sur la surface (s_0) d'équation

$$-\frac{\psi(x , y)}{p\varphi(x , y)} = z ,$$

ou

$$pz\varphi(x , y) + \psi(x , y) = 0 ,$$

il vient

$$\Sigma V_i = \iint_\sigma pz\gamma\, d\sigma$$

$$= p \iint_\sigma z\gamma\, d\sigma ;$$

les volumes V_i ont donc pour moyenne arithmétique le volume cylindrique de même nature que limite la cloison σ.

A (S) se trouve donc associée la surface (s_0) particulière: lieu du point de coordonnées $\left(x,\, y,\, \frac{\Sigma Z_i}{p}\right)$, c'est-à-dire du barycentre des points M_i isomassifs — centre des moyennes distances —; c'est la surface conjuguée de la direction $z'z$ relative à la surface donnée. De là ce théorème qui lie simplement celui d'Abel à la théorie des polaires:

Les volumes que détermine un cylindre sur une surface algébrique ont pour moyenne arithmétique celui que ce même cylindre découpe sur la surface conjuguée de la direction des génératrices relativement à la surface donnée.

Lorsqu'en particulier le coefficient $\psi(x, y)$ est nul — il en est ainsi, en particulier, quand xOy est un plan de symétrie pour (S) — la somme abélienne l'est également: la surface conjuguée est le plan xOy.

Plus généralement, si

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{ax + by - h}{c}$$

la surface conjuguée est plane et le volume moyen est celui d'un tronc cylindrique élémentaire; les surfaces (S) ont pour équation

$$Z^p(aX + bY + cZ - h)\varphi(X, Y) + Z^{p-2}\Theta(X, Y) + \ldots = 0 .$$

§ 4. — *Cas des quadriques.* — Si, dans l'équation précédente, $p = 2$, nous obtenons pour surfaces (S) les quadriques; directement, à l'aide de

$$AX^2 + \ldots + 2BXY + \ldots + 2CX + \ldots + D = 0 ,$$

il vient

$$\varphi \equiv A'' ,$$
$$\psi \equiv 2(B'x + By + C'') :$$

l'équation de (s_0),

$$B'x + By + A''z + C'' = 0 ,$$

est celle du plan diamétral conjugué de la direction $z'z$:

Les volumes que détermine un cylindre sur une quadrique ont pour moyenne arithmétique celui que ce même cylindre découpe sur le plan diamétral conjugué de la direction des génératrices.

§ 5. — *Cas des cyclides.* — Prenons les cyclides d'équation

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 4h(AX^2 + BY^2 + CZ^2) \\ - 4k^2(aX + bY + cZ) \pm l^4 = 0 .$$

Pour utiliser l'expression (2), formons l'équation en ρ

$$\rho^4(\lambda x + \mu y + \nu z - d) + 4d\rho(\lambda x + \dots - d)^3 + \dots ,$$

de sorte que

$$\Sigma V_i = 4\iint_\sigma - d(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\,d\sigma ;$$

$$= -4d\iint_\sigma (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\,d\sigma ;$$

le volume moyen est celui que le même cylindre découpe sur le plan de base et le plan parallèle mené par l'origine. Ce résultat remarquable est celui que donnerait une sphère centrée à cette origine.

§ 6. — Il est immédiat de constater que la surface (s_0) ne dépend pas du plan (P): lui substituer, en effet, un plan (P′) revient à ajouter ou à retrancher à V_i le volume d'un tronc cylindrique, donc à la moyenne $\frac{\Sigma V_i}{p}$ ce même volume.

§ 7. — *Noyau cylindrique.* — Analogue à la question des sommes abéliennes est celle des noyaux cylindriques, relative aux surfaces (S)

$$Z^2\varphi(X, Y) + Z\psi(X, Y) + \Theta(X, Y) = 0 .$$

Le volume de ce noyau, dont les génératrices sont parallèles à $z'z$, a pour expression

$$N = \iint_\sigma |\rho_2 - \rho_1|\, z\gamma\, d\sigma .$$

Et comme

$$|\rho_2 - \rho_1| = \sqrt{\left(\frac{z\psi}{z^2\varphi}\right)^2 - 4\cdot\frac{\Theta}{z^2\varphi}} .$$

il vient

$$\boxed{N = \iint_{\sigma} \frac{\sqrt{\psi^2 - 4\varphi\Theta}}{\varphi} \gamma \, d\sigma} \qquad (3)$$

Si l'on trace σ sur la surface (s_1) d'équation

$$\frac{\sqrt{\psi^2 - 4\varphi\Theta}}{\varphi} = z ,$$

ou

$$z^2 \varphi^2 (x , y) + 4\varphi . \Theta - \psi^2 = 0 ,$$

le volume du noyau est celui du cylindre de même nature que limite (s_1). Ici (P) ne joue aucun rôle.

Considérons alors une quadrique à centre; rapportons-là au diamètre parallèle aux génératrices du cylindre et au plan conjugué [1], en sorte que son équation s'écrive

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + \varepsilon = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1) .$$

Ici

$$\varphi \equiv A'' , \qquad \psi \equiv 0 ,$$

$$\Theta \equiv Ax^2 + A'y^2 + \varepsilon ,$$

et (s_1) a pour équation

$$z^2 . A''^2 + 4A''(Ax^2 + A'y^2 + \varepsilon) = 0 ,$$

ou

$$Ax^2 + A'y^2 + \frac{A''}{4} z^2 \frac{A''}{4} z^2 + \varepsilon = 0 ;$$

c'est la transformée de la quadrique (S) par la dilatation $\mathcal{D}(xOy,\ z'z,\ 2)$.

En particulier, à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$$

correspond l'ellipsoïde de révolution allongé

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{4R^2} - 1 = 0 .$$

---

[1] Les axes de coordonnées ne sont plus rectangulaires; mais les intégrales donnent des expressions proportionnelles aux volumes.