Sommaire.

Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

APPLICATION A LA REPRÉSENTATION CONFORME DES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

PAR

P. C. DELENS (Le Hâvre).

SOMMAIRE.

I. Nous avons, dans un précédent mémoire [1], étudié systématiquement les procédés de formation des invariants de formes et d'équations différentielles du 1er ordre pour les transformations à variables séparées

$$\bar{u} = \mathrm{U}(u) \qquad \bar{v} = \mathrm{V}(v) \tag{3}$$

et nous avons indiqué, dans les cas les plus simples, comment se posaient, au moyen de ces invariants, les problèmes d'équivalence des systèmes considérés. Nous faisons ici une application des résultats obtenus à la représentation conforme des surfaces (ou du plan), les variables u, v jouant le rôle de coordonnées symétriques; dans ce but nous modifions d'abord les procédés exposés pour montrer l'emploi et le rôle des paramètres différentiels de la théorie des surfaces. Bien qu'il apparaisse nettement que les invariants d'un même ordre sont les coefficients de formes ou d'équations différentielles invariantes, nous n'avons usé qu'avec modération des méthodes vectorielles ou tensorielles dont ceci permettait l'introduction: pour un exposé plus complet, nous renvoyons le lecteur à notre thèse [2].

II. En considérant d'abord une forme de Pfaff ϖ, celle-ci est évidemment liée au faisceau des courbes intégrales de l'équation $\varpi = 0$; aux opérateurs invariants $\mathfrak{I}_u$, $\mathfrak{I}_v$ attachés à cette forme et définissant des transformations infinitésimales le long des lignes

---

[1] Equivalences de formes et d'équations différentielles par les transformations à variables séparées: L'*Enseignement Mathématique*, XXVII, nos 4-5-6. Référence: *(Equivalences)*.

[2] Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme (Paris, Gauthier-Villars, 1927). Référence: *(Thèse)*.

minima, nous substituons d'abord des opérateurs agissant le long des courbes du faisceau $\varpi = 0$ et de leurs trajectoires orthogonales: il s'ensuit une modification correspondante des invariants obtenus par le jeu de ces opérateurs à partir des coefficients de la forme.

III. Nous montrons ensuite comment se modifient les opérateurs et les invariants d'une forme ϖ quand on remplace celle-ci par une forme proportionnelle. Cette méthode, que nous avions laissée de côté dans notre premier mémoire, trouve dans la suite diverses applications et mène en particulier à un nouveau procédé d'étude pour une équation de Pfaff invariante.

Un ds^2 adjoint est-il à conserver par les transformations (3) en même temps qu'une forme ϖ, on retrouve un problème d'applicabilité des surfaces; les invariants du système ϖ, ds^2 comprennent alors des *invariants conformes* de ϖ, des *invariants gaussiens* (invariants conformes du ds^2) et des invariants mixtes ou *seminvariants* de ϖ.

IV. Pour une forme ϖ_0 différentielle exacte, les invariants des premiers ordres sont ainsi calculés au moyen des symboles Δ, Θ, Δ_2, etc. de la théorie des surfaces (symboles que nous modifions légèrement dans le texte); on reconnaît déjà les combinaisons de ces symboles qui fournissent les invariants conformes. Nous trouvons des relations utiles (formules (44), (44′)) entre les paramètres différentiels d'ordre supérieur. Nous donnons aussi pour la courbure totale la formule très générale

$$K = \Delta_2 \log \sqrt{\Delta f} - \frac{\overline{\Delta_2 f}^2}{\Delta f} - \Delta\left(f, \frac{\Delta_2 f}{\Delta f}\right) \qquad (52)$$

où la fonction f des coordonnées curvilignes est *arbitraire* [1] (mais non constante).

V. Les invariants de déformation d'une équation $\varpi = 0$ sont ceux d'une forme de Pfaff *semi-normale* ϖ_1 proportionnelle à ϖ et normée vis-à-vis du ds^2; les invariants du 1er ordre de cette forme sont des courbures géodésiques. Nous revenons ici sur la notion de *réseau angulaire* de courbes *(Thèse)* et du vecteur de courbure géodésique de ce réseau, les formules vectorielles

$$\mathbf{g}_1 = -\frac{\Delta_2 f}{\Delta f}\nabla f + \frac{1}{2}\nabla \log \Delta f \qquad (63) \qquad\qquad K = \operatorname{div} \mathbf{g}_1 \qquad (65')$$

conduisant aussitôt à la formule précédente (52).

---

[1] L'apparence paradoxale de ce résultat disparaît si on remarque que les opérateurs Δ et Δ_2 dépendent des coefficients du ds^2.

Signalons encore la formule

$$g_1 = -\nabla \log W + J\nabla\varphi \qquad (61)$$

où les éléments géométriques de la courbure géodésique sont particulièrement en évidence.

VI. A la forme ϖ d'une équation $\varpi = 0$ nous rattachons la forme *adjointe* ϖ_i des trajectoires orthogonales $\varpi_i = 0$ du premier faisceau de courbes; les opérateurs et invariants des deux formes sont liés très simplement. Aux deux formes est attaché un $d\sigma^2$ *canonique* sur lequel les deux formes sont semi-normales. Nous ne pouvons manquer de revenir ici sur les éléments vectoriels, et étudions également les notations convenables pour les opérateurs différentiels attachés aux formes de Pffaf, en liaison avec le $d\sigma^2$ canonique. Nous donnons différentes expressions d'un seminvariant $I_1 = \Delta_2\varphi$ qui présente un intérêt particulier dans la représentation conforme.

VII. Un faisceau isotherme de courbes $\varphi = 0$ est caractérisé par la condition invariante $I = 0$, ou $I_1 = 0$, c'est-à-dire $\Delta_2\varphi = 0$; à un tel faisceau se rattache un réseau angulaire isotherme et plus généralement un *ensemble* ($I = 0$) isotherme; nous rappelons rapidement les propriétés d'un tel faisceau, qui ne possède aucun invariant conforme.

VIII. Si un faisceau $\varpi = 0$ n'est pas isotherme, il existe une forme *normale*

$$\varpi^* = \sqrt{I}\,\varpi \qquad (99)$$

dont les invariants conformes sont ceux de l'équation $\varpi = 0$; sur un $d\sigma^{*2}$ canonique à ϖ^*, cette forme est en même temps semi-normale; pour les courbes d'un même *ensemble* (I_1) on peut introduire la notion d'arc conforme. Le $d\sigma^{*2}$ canonique peut être utilisé pour la classification des faisceaux de courbes vis-à-vis des transformations conformes, problème qui se formule comme un problème d'équivalence avec conservation du $d\sigma^{*2}$.

IX. L'interprétation géométrique des éléments introduits jusqu'ici introduit la notion d'*isoclines conformes* d'un faisceau de courbes par rapport à un faisceau isotherme; mais les problèmes de représentation conforme ne se ramènent pas toujours aussitôt à des égalités d'angles, et la manière dont se modifient des quantités non invariantes offre aussi de l'intérêt. C'est ainsi qu'on reconnait qu'un faisceau arbitraire $\varpi = 0$ peut être représenté conformément suivant un faisceau de géodésiques: nous montrons comme application qu'on peut compléter, au moyen d'une représentation conforme, la solution du problème

des congruences de normales attachées aux points d'une surface (je ne dis pas les normales de la surface).

Il est connu que les *réseaux cerclés* de courbes d'une surface se transforment les uns dans les autres par les représentations conformes de la surface: nous nous contentons de quelques indications sur cette théorie récente.

X. Comme nous l'avons fait dans notre première Etude, nous montrons comment les invariants et opérateurs des formes et équations quadratiques se rattachent à ceux de formes et d'équations linéaires; au double faisceau de courbes défini par une équation quadratique, on doit, au point de vue géométrique, joindre d'abord la considération des faisceaux bissecteurs et du faisceau formé par les courbes le long desquelles l'angle 2ω du faisceau initial est constant. Ici encore, on retrouve des formes normales et un $d^*\sigma^2$ canonique. Pour l'isothermie, on peut considérer une *hémi-isothermie* et une *holo-isothermie.*

XI. Nous sommes maintenant en présence de deux faisceaux du 2^{me} ordre, celui des lignes minima et le faisceau $\alpha^{(2)} = 0$ à conserver; pour les formes correspondantes $ds^2 = W^2\,du\,dv$ et $\alpha^{(2)} = C^2 d\xi d\eta$, il est intéressant de montrer les relations entre les invariants calculés à partir des changements de variables portant soit sur u, v, soit sur ξ, η. Cette symétrie du problème a déjà été préparée dans les numéros précédents: elle prépare son extension à des questions analogues, où ne figureraient plus nécessairement les lignes minima.

Les méthodes exposées peuvent aussi se prolonger pour l'étude de formes et d'équations différentielles de degré supérieur.

I. Notations — Préliminaires.

1. Le ds^2 d'une surface étant pris sous la forme

$$ds^2 = W^2 du\,dv = W^2(dX^2 + dY^2) \tag{1}$$

les paramètres u, v sont ceux des lignes minima de la surface, et les variables X, Y telles que

$$\begin{cases} u = X + iY \\ v = X - iY \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \frac{1}{2}(u + v) \\ Y = -\frac{i}{2}(u - v) \end{cases} \tag{2}$$