MOUVEMENT BINORMAL

Autor(en): **Devisme, Jacques**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23884

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

MOUVEMENT BINORMAL

PAR

Jacques DEVISME (Le Hâvre).

Dans une précédente note [1], M. Letterio TOSCANO a étudié le mouvement normal d'un point; peut-on plus particulièrement trouver des mouvements normaux par rapport à plusieurs centres ?

Prenons le cas de deux centres distincts O et Ω, l'accélération du point M doit être, à chaque instant, perpendiculaire aux droites OM et ΩM, donc au plan OMΩ; elle est en particulier orthogonale à l'axe OΩ, ce qui nous permet d'énoncer les résultats suivants:

Si un mouvement est normal par rapport à deux points de l'espace il est normal pour tous les points de la droite déterminée par les deux premiers points.

La projection sur un plan perpendiculaire à l'axe est un mouvement normal par rapport à la trace de l'axe sur le plan.

La projection sur l'axe est un mouvement uniforme.

De ces deux dernières propriétés on déduit finalement que:

Tout mouvement binormal est la composition d'un mouvement normal plan et d'un mouvement rectiligne uniforme perpendiculaire au plan. Le mouvement obtenu est normal par rapport à tout point de la perpendiculaire au plan élevée du centre du premier mouvement.

Aux exemples de M. Toscano nous pourrons ainsi faire correspondre des exemples spatiaux de mouvements binormaux

---

[1] *Enseignement Mathématique*, 29me année, page 81.

pour les courbes dont les équations en coordonnées cylindriques sont

$$\rho = \rho(\theta) , \qquad z = kt .$$

Si nous remarquons que toute courbe peut être considérée comme tracée sur un cylindre ayant comme direction de génératrices la droite $O\Omega$ il se pose immédiatement le problème suivant: *Quelle sont les hélices susceptibles d'être parcourues d'un mouvement binormal* ? Cela revient à déterminer la section droite par la condition qu'elle puisse être parcourue d'un mouvement qui soit à la fois normal par rapport au centre des coordonnées polaires et uniforme.

Soit a la vitesse constante, on a la condition

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2a^2 ,$$

d'où

$$r^2 = a^2 t^2 + bt + c ;$$

mais d'autre part on sait que

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} ;$$

on a donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r}\left[\frac{d^2 r}{dt^2}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{a^2}{r} - \frac{(2a^2 t + b)^2}{4r^3}\right]$$

ou

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{(4a^2 c - b^2)}{4(a^2 t^2 + bt + c)^2} .$$

Ainsi la section droite est déterminée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} r = \varepsilon \sqrt{a^2 t^2 + bt + c} , \\ \theta = \dfrac{\varepsilon'}{2} \displaystyle\int \frac{\sqrt{4a^2 c - b^2}.dt}{a^2 t^2 + bt + c} . \end{cases} \qquad \varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$$

Nous terminerons en faisant quelques remarques relatives au mouvement normal plan [1].

[1] Il est clair qu'il ne peut pas exister de mouvement trinormal dans l'espace à trois dimensions.

I. *Existe-t-il des courbes qu'on ne puisse pas décrire d'un mouvement normal par rapport à un point de leur plan donné* a priori ?

On peut écrire la condition $Wr = 0$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left[\frac{d^2r}{d\theta^2} - r\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \ . \qquad (1)$$

Le mouvement ne peut avoir lieu que si $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ (sauf le cas de la droite passant par le pôle. On aurait alors $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$, le mouvement serait uniforme et l'accélération nulle). Supposons donc $\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \neq 0$ et considérons le coefficient de $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$; deux cas se présentent:

1° $\frac{d^2r}{d\theta^2} - r = 0$, cas d'un cercle passant par le pôle; la condition (1) exige $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, ce qui montre que *sur un cercle passant par le pôle, un mouvement normal est un mouvement à vitesse angulaire constante* et *réciproquement un mouvement normal à vitesse angulaire constante ne peut avoir lieu que sur un cercle passant par le pôle.*

2° $\frac{d^2r}{d\theta^2} - r \neq 0$, alors il est impossible que le produit $\frac{dr}{d\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2}$ s'annule. Comme on peut toujours choisir le mouvement solution de (1) (quand $r(\theta)$ est donné) de telle façon que $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ soit différent de zéro il reste la condition $\frac{dr}{d\theta} \neq 0$, on en déduit que:

Il est impossible de trouver sur un cercle un mouvement normal par rapport à son centre et c'est le seul cas d'exception pour les mouvements plans [1].

II. Nous terminerons en reprenant le dernier calcul de M. Toscano sur la recherche des mouvements normaux et plans dont les accélérations sont de la forme

$$W = k\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 .$$

[1] Je n'ai pas fait l'étude analogue dans l'espace où les calculs se présentent d'une façon beaucoup moins simple; je ne puis donc conclure dans ce cas.

A partir de la troisième équation k a été à tort égalé à l'unité. En rétablissant cette constante on arrive à l'équation différentielle

$$\frac{du}{u^2 - ku + 1} = d\theta \ , \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{ds}{d\theta} \ ; \qquad s = \log \rho \ .$$

On a deux intégrales singulières obtenues en égalant u à l'une des racines de l'équation $u^2 - ku + 1 = 0$.

On trouve ainsi

$$2u = k \pm \sqrt{k^2 - 4} \ .$$

$$\rho = e^s = e^{\int u d\theta} = \rho_0 e^{u\theta}$$

avec u ayant la valeur donnée par l'équation précédente.

En posant $k = -\frac{1 + b^2}{b}$ il vient

$$k \pm \sqrt{k^2 - 4} = -\left(\frac{1 + b^2}{b}\right) \pm \left(\frac{1 - b^2}{b}\right) = -2b \quad \text{et} \quad -\frac{2}{b} \ .$$

On a donc les solutions

$$\rho = \rho_0 e^{-b\theta} \ , \qquad \rho = \rho_1 e^{-\frac{\theta}{b}} \ ;$$

dont la première est celle considérée page 83.

Il est important de remarquer que, au contraire, si l'on considère l'intégrale générale de

$$\frac{du}{u^2 - ku + 1} = d\theta$$

(trois cas à considérer suivant les valeurs relatives de $|k|$ et de 2) on trouvera des courbes *non réductibles* aux spirales logarithmiques dont on est parti, et cela quelles que soient les valeurs attribuées aux constantes d'intégration.