SUR L'ITÉRATION DE LOG (1 + z)

En d'autres termes les surfaces de la famille $v^2 =$ const. sont engendrées par les courbes de la congruence. Dans le cas où la congruence constituée par les lignes de forces est une normalie, les courbes de la congruence sont, d'après ce qui précède, des géodésiques sur les surfaces normales aux lignes de forces et le théorème (*d*) est démontré.

Si la vitesse $\bar{v}$ dérive d'un potentiel φ:

$$\bar{v} = - \operatorname{grad} \varphi \; ,$$

l'accélération sera

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \varphi)^2$$

et les courbes de la congruence sont des géodésiques des surfaces $(\operatorname{grad} \varphi)^2 =$ const.

Le théorème (*b*) peut être aussi énoncé de la façon suivante:

Pour que les trajectoires orthogonales d'une famille des surfaces $\varphi (x, y, z) =$ const. *soient des géodésiques d'une autre famille de surfaces il est nécessaire et suffisant que les surfaces de la famille* $(\operatorname{grad} \varphi)^2 =$ const. *coupent orthogonalement les surfaces de la famille* $\varphi =$ const.

SUR L'ITÉRATION DE LOG $(1 + z)$

PAR

A. VAN HASELEN (Loosdrecht, Hollande).

Nous aurons à faire usage du théorème suivant:

Si f (z) *est holomorphe dans un cercle* C *et si toutes ses valeurs sont dans* C, *alors les itérés* $z_1 = f(z)$, $z_2 = f(z_1)$, ... $z_n = f(z_{n-1})$, ... *tendent pour* n *infini vers un point limite unique* α, *indépendant du point initial* z *dans* C. *Si l'équation* $f(z) = z$ *possède une racine à l'intérieur de* C, *alors* α *coïncide avec cette racine. Si une telle racine n'existe pas,* α *est sur la frontière de* C [1].

---

[1] Voir J. WOLFF, Sur l'itération des fonctions bornées (*C. R.*, 182, 1926, p. 42). J. WOLFF, Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz (*C. R.*, 182, 1926, p. 918). Voir aussi A. DENJOY, *C. R.*, 182, 25 janvier 1926.

1. — Soit d'abord $z = x + yi$ dans le demi-plan D ($x > 0$). Posons $f(z) = \log(1 + z)$ en prenant la valeur principale du logarithme. En vertu de $|1 + z| > 1$ le point $f(z)$ est dans D. L'inégalité $\log(1 + x) < x$ pour $x > 0$ nous apprend que, si x est situé dans D sur l'axe réel, les itérés x_n de x tendent vers une limite $\alpha \geqq 0$. Si α était positif, le théorème cité exigerait que $\log(1 + \alpha) = \alpha$, donc le point unique α du théorème coïncide avec l'origine 0. Nous trouvons ainsi que pour chaque z de D on a $z_n \to 0$. Si $z = yi$, $y \neq 0$, $y \neq \infty$, alors $z_1 = \log(1 + z)$ est dans D, donc encore $z_n \to 0$.

2. — Posons $\Phi(w) = e^w - 1$ et remarquons que, si w est dans le demi-plan D′ ($x < 0$), le point $\Phi(w)$ est à l'intérieur du cercle $\Gamma(|z + 1| = 1)$. Le théorème cité nous apprend que les itérés $w_1 = \Phi(w)$, $w_2 = \Phi(w_1)$, ... $w_n = \Phi(w_{n-1})$, ... tendent vers 0 pour chaque w de D′. On voit sans peine que dans Γ on a uniformément $w_n \to 0$.

3. — Posons $\beta_0 = 0, \beta_1 = -1, \beta_2 = \Phi(\beta_1)$, etc. Soit maintenant z une valeur finie et différente des points β. Alors $f(z) = \log(1 + z)$ a un nombre infini de déterminations, dont aucune ne coïncide avec un β_γ. Après avoir choisi une détermination arbitraire z_1, toutes les valeurs de $\log(1 + z_1)$ sont différentes des β_γ. Choisissons-en une valeur arbitraire z_2 et continuons ce processus. Je dis que nous rencontrerons un indice k tel que la partie réelle des nombres $\log(1 + z_k)$ soit positive. En effet on a $z = \Phi_n(z_n)$. Si z_n est dans Γ une infinité de fois, alors $|\Phi_n(z_n)| < |z|$ pour n assez grand, en vertu du n° 2, ce qui donne une contradiction. Si z_n est extérieur à Γ, alors z_{n+1} n'est pas dans D′ en vertu du n° 2 et de la relation $z_n = \Phi(z_{n+1})$. Donc z_{n+1} est dans D ou sur sa frontière et diffère de 0 ou de ∞ ; il en résulte que les z_{n+2} sont dans D.

Nous arrivons ainsi à la proposition suivante:

I. *Soit* z *un point initial différent de* ∞, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = e^{\beta_1} - 1$, *etc. Soit* z_1 *une détermination arbitraire de* $\log(1 + z)$, z_2 *une détermination arbitraire de log* $(1 + z_1)$, *etc. Alors après un nombre fini de ces opérations la partie réelle des* z_n *est positive.*

Si l'on choisit dès ce moment pour z_{n+1} *la valeur principale de log* $(1 + z_n)$, *alors* $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$.

II. *En partant d'un point* β_γ, *il y a une seule manière d'itération de la fonction log* $(1 + z)$ *qui conduit à* $z_{\gamma+1} = \infty$, *et pour toutes les autres manières les* z_n *finissent par se trouver dans la condition* I.

SUR LE PENDULE DE LONGUEUR VARIABLE

PAR

U. CASSINA (Milan).

J'ai lu avec intérêt la Note de M. R. THIRY, *Sur le lancement du pendule par modification de sa longueur* (*L'Enseignement mathématique*, t. XXIX, 1930, p. 75-80) et je désire y ajouter quelques remarques.

1. — La balançoire peut être considérée comme un pendule simple de longueur variable: le point pesant oscillant est le centre de gravité de l'enfant qui se promène sur la balançoire.

Si O est le point de suspension, A la position initiale du point pesant, B sa position sur la verticale par O, et C la position finale après une oscillation simple; alors l'enfant s'accroupit dans la branche descendante AB et se hausse *plus vite* (cfr. nº 2) dans la branche ascendante BC, et ainsi il augmente l'amplitude de l'oscillation.

L'explication rationnelle des mouvements que fait l'enfant afin d'augmenter l'amplitude des oscillations de la balançoire, découle immédiatement du théorème suivant:

« Le centre de gravité de l'aire OABC, décrite par le fil du « pendule dans une oscillation simple (dans le vide) tombe sur « la verticale qui passe par le point de suspension O. »