

# 1. — Remarques préliminaires.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

les  $C_m$  étant des constantes données et  $\Phi_m^0(z)$ , ( $m = 0, 1, \dots$ ), une suite de fonctions de la variable complexe  $z$ , qui vérifient le système récurrent infini

$$P_m(z) \Phi_m^0(z) = \sum_{n=1}^m Q_{m,n}(z) \Phi_{m-n}^0(z) + R_m(z) , \tag{2}$$

$(m = 0, 1, \dots)$

où  $P_m(z)$ ,  $Q_{m,n}(z)$  et  $R_m(z)$  sont des polynomes connus de  $z$ . Il est facile à voir que toutes les fonctions  $\Phi_m^0(z)$  sont rationnelles. En effet, supposant que  $z$  est distinct de tous les zéros des polynomes  $P_m(z)$ , nous pourrons calculer de proche en proche toutes les fonctions  $\Phi_m^0(z)$ , dont les expressions seront données par la relation <sup>1</sup>

$$\Phi_m^0(z) = \frac{1}{P_0(z) P_1(z) \dots P_m(z)} \begin{vmatrix} Q_{m,1}(z) & Q_{m,2}(z) & \dots & Q_{m,m}(z) & R_m(z) \\ -P_{m-1}(z) & Q_{m-1,1}(z) & \dots & Q_{m-1,m-1}(z) & R_{m-1}(z) \\ 0 & -P_{m-2}(z) & \dots & Q_{m-2,m-2}(z) & R_{m-2}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -P_0(z) & R_0(z) \end{vmatrix} \tag{3}$$

Nous voyons bien que  $\Phi_m^0(z)$  apparaît comme un quotient de polynomes. *La série (1) est donc une série de fonctions rationnelles qui, dans l'hypothèse faite, est définie formellement d'une manière univoque à partir des polynomes donnés.* C'est des séries de cette forme que nous nous occuperons dans notre article.

1. — REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Considérons la série un peu plus générale

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^m C_m \Phi_m^0(z) , \tag{4}$$

où  $\lambda$  est un paramètre complexe et  $\rho$  un nombre réel positif. Si

<sup>1</sup> Obtenue en résolvant par la règle de Cramer le système d'équations linéaires déduit des  $(m + 1)$  premières relations de (2).

nous désignons par  $\rho_1$  le rayon de convergence dans le plan  $\lambda$  de la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m C_m .$$

le rayon  $R_1$  correspondant à (4) sera évidemment donné par la relation  $R_1 = \rho_1 \cdot R$ , où  $R$  est le rayon de convergence de la série particulière .

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^m \Phi_m^0(z) . \quad (4')$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité de notre étude, considérer seulement la série (4') pour laquelle toutes les constantes  $C_m$  sont égales à l'unité.

Nous sommes obligés d'introduire dès le début *une condition nécessaire* dans notre recherche: la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right)^m R_m(z) \quad (5)$$

doit converger uniformément en  $\lambda$  sur un certain cercle  $C$ , dont le centre est à l'origine  $O_\lambda$ , ceci quel que soit  $z$  appartenant à un domaine simplement connexe  $D$  qui contient l'origine  $O_z$ . Cette série représente donc une fonction holomorphe de la variable  $\lambda$  sur tout le cercle fermé  $C$ . Prenons  $\rho$  égal au rayon de ce cercle. Il est évident que dans ces conditions, la série (5) admet un cercle de convergence  $C_1$  dont le rayon est plus grand que  $\rho$ .

Posons maintenant  $\Phi_m^0(z) = \rho^m \cdot \Phi_m(z)$ ; nous déduisons de (2) que les nouvelles fonctions  $\Phi_m(z)$  satisfont au système récurrent

$$P_m(z) \Phi_m(z) = \sum_{n=1}^m \frac{Q_{m,n}(z)}{\rho^n} \Phi_{m-n}(z) + \frac{R_m(z)}{\rho^m} . \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (2')$$

De cette manière, nous rattachons le rayon de convergence de notre série (4') à celui de la série connue (5), ce qui d'ailleurs est inhérent au problème.