

Premier cas : $\frac{1}{2}$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$\frac{dy}{dx}$ est positif à l'extérieur de la courbe (C), nul sur la courbe et négatif à l'intérieur.

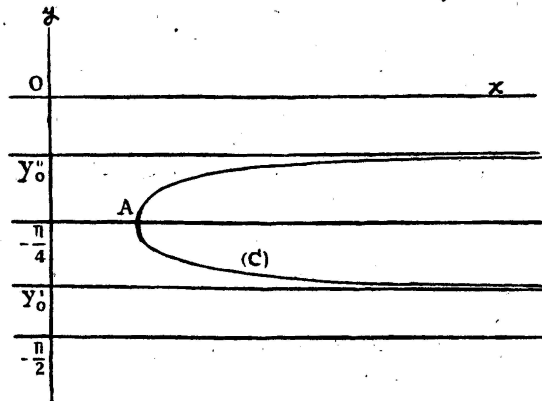


Fig. 1.

Les courbes sur lesquelles $\frac{dy}{dx}$ est égal à une constante donnée (supérieure à $\frac{4a^2 - 1}{4a}$) sont analogues à (C) et s'emboîtent les unes dans les autres.

6. — *Remarque générale de comparaison des diverses équations (F).* — Le deuxième membre de (F) est une fonction croissante de a . Donc si deux intégrales des équations $F(a)$ et $F(a')$ où a' est supérieur à a , passent en un même point d'abscisse x_0 , pour x supérieur à x_0 la première intégrale (correspondant à a) est située constamment au-dessous de la deuxième (correspondant à a').

Nous utiliserons souvent cette remarque.

Passons à l'étude détaillée de chaque cas.

PREMIER CAS : $a > \frac{1}{2}$.

7. — Limitons d'abord l'étude à celle des portions des courbes intégrales situées dans la bande définie plus haut (n° 2).

Désignons par $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $x(0)$, $x\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ les abscisses des points d'intersection d'une telle portion avec les droites d'ordonnées $-\frac{\pi}{2}$, 0 , $+\frac{\pi}{2}$. Ces abscisses sont rangées par ordre de grandeur croissante sur la portion de courbe étudiée, x est fonction croissante de y .

Lorsque y est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 , $\frac{dy}{dx}$ vérifie les inégalités :

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x(0) < \frac{dy}{dx} < a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où l'on déduit:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)} < x(0) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x(0)}$$

et l'on constate, sur ces inégalités, que $x(0) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est borné supérieurement et inférieurement, quelle que soit la valeur de $x(0)$; de plus, lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$, cette différence converge uniformément vers:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y}.$$

Lorsque y est compris entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{dx}$ vérifie les inégalités:

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x(0) < \frac{dy}{dx} < a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où l'on déduit:

$$\int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right)} < x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0) \\ < \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x(0)}.$$

Mêmes conclusions que précédemment. Lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$, la différence $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$ converge uniformément vers:

$$\int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y}.$$

En résumé $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est borné supérieurement et inférieurement (respectivement par $\frac{4a\pi}{4a^2-1}$ et par $\frac{\pi}{4a}$) et, lorsque $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ tend vers $+\infty$, se rapproche indéfiniment de

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y \, dy}{a + \sin y \cos y} = \frac{\pi}{\sqrt{4a^2-1}}$$

8. — On passe des portions de courbes intégrales précédentes aux portions situées dans la bande:

$$x \leq 0 \quad -\frac{\pi}{2} \leq y < +\frac{\pi}{2}$$

par symétrie par rapport à 0; puis aux courbes intégrales tout entières par une suite de translations parallèles à Oy, et de grandeur $k\pi$, k étant un entier positif ou négatif.

Les points de la courbe intégrale, qui ont pour ordonnées $\frac{\pi}{2} + k\pi$, jouissent de la propriété suivante, qui est une traduction de la propriété du n° 7: la différence $x\left[\frac{\pi}{2} + k\pi\right] - x\left[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right]$ de deux points consécutifs tend vers $\frac{\pi}{\sqrt{4a^2-1}}$ lorsque k tend vers $\pm\infty$.

En ces points, la tangente à la courbe intégrale est parallèle à Oy.

9. — La régularité limite des points précédents nous conduit à la question suivante: la courbe intégrale de (F) se rapproche-t-elle indéfiniment d'une courbe périodique lorsque x tend vers $\pm\infty$? (il suffit de considérer le cas de $+\infty$).

La fonction $\text{th } x$ tendant vers 1 quand x tend vers $+\infty$, cette courbe périodique ne peut être qu'une intégrale de l'équation:

$$\frac{dy}{dt} = a(1 + \text{tg}^2 y) + \text{tg } y. \quad (1)$$

Comparons les valeurs des abscisses x et t correspondant à la valeur y de l'ordonnée, sur une courbe intégrale de (F) et sur une courbe intégrale de (1); la relation:

$$\frac{d(x-t)}{dx} = \frac{\sin y \cos y}{a + \sin y \cos y} (1 - \text{th } x)$$

entraîne les inégalités :

$$\frac{d(x-t)}{dx} > -\frac{2}{2a-1} e^{-2x} \quad (2)$$

$$\frac{d(x-t)}{dx} < \frac{2}{2a+1} e^{-2x} \quad (2')$$

Désignons par X et T les valeurs des abscisses (respectivement supérieures à x et t) correspondant à une valeur Y de l'ordonnée, supérieure à y. De (2) et de (2') on déduit :

$$X - T - \frac{1}{2a-1} e^{-2X} > x - t - \frac{1}{2a-1} e^{-2x} \quad (3)$$

$$X - T + \frac{1}{2a+1} e^{-2X} < x - t + \frac{1}{2a+1} e^{-2x} \quad (3')$$

inégalités qui vont nous servir à établir qu'à une courbe intégrale de (F) correspond une courbe périodique asymptote, intégrale de l'équation (1).

Soit une suite de valeurs de X tendant vers $+\infty$:

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \quad (4)$$

et soit $(c_1), (c_2), \dots, (c_n) \dots$ la suite correspondante de courbes intégrales de l'équation (1), coupant aux points d'abscisses (4) la courbe intégrale étudiée de l'équation (F); autrement dit: $T_1 = X_1; \dots, T_n = X_n; \dots$

A l'ordonnée y correspondent: d'une part l'abscisse x de la courbe intégrale de (F), d'autre part une suite infinie $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ d'abscisses de points situés sur les courbes $(c_1), (c_2) \dots, (c_n) \dots$; ces abscisses vérifient les inégalités :

$$\frac{1}{2a+1} [e^{-2X_n} - e^{-2x}] < x - t_n < \frac{1}{2a-1} [e^{-2x} - e^{-2X_n}]$$

déduites des inégalités (3) et (3'). La quantité $|x - t_n|$ est donc bornée et les t_n admettent au moins une valeur limite¹, soit t. Parmi les indices n, choisissons une suite infinie d'indices tels que les t_n correspondant tendent vers t; quitte à supprimer s'il le faut des X_n , nous pouvons supposer que les t_n tendent tous vers t (pour ne pas introduire de nouvelles notations). Soit (c) la courbe intégrale de l'équation (1) passant par le point de coordonnées t et y. Toutes les courbes intégrales de l'équation (1) se déduisent de l'une d'elles par translation parallèle à Ox, de sorte qu'en désignant par T l'abscisse du point de (c) possédant même ordonnée que le point de (c_n) d'abscisse $T_n = X_n$, les différences $T - T_n$ et $t - t_n$ sont égales.

¹ Ils n'en admettent d'ailleurs qu'une. Ce point résulte de la suite du raisonnement.

Des inégalités (3) et (3') on déduit alors les inégalités:

$$(t_n - t) - \frac{1}{2a + 1} (e^{-2x} - e^{-2X_n}) < x - t < (t_n - t) + \frac{1}{2a - 1} (e^{-2x} - e^{-2X_n}).$$

La courbe (c) est fixe; l'indice n est quelconque. Lorsque n tend vers $+\infty$, les inégalités précédentes donnent:

$$-\frac{1}{2a + 1} e^{-2x} \leq x - t \leq \frac{1}{2a - 1} e^{-2x} \quad (5)$$

La courbe intégrale étudiée de l'équation (F) est donc asymptote à la courbe intégrale (c) de l'équation (1), courbe périodique¹.

Les inégalités (6) fournissent une limite de la distance de la courbe étudiée et de sa courbe asymptote.

$$\text{DEUXIÈME CAS: } a = \frac{1}{2}.$$

10. — Etudions d'abord les portions situées dans la bande définie au n° 2.

L'équation (F) peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2 - \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{th} x). \quad (F')$$

Les inégalités:

$$\frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 y) < \frac{dy}{dx} < \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} y)^2$$

valables lorsque y est positif, fixent pour la différence $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$ la borne supérieure π et la borne inférieure 1. Précisons: x étant une

¹ Dans le problème d'Agrégation de 1928 figurent l'étude des courbes (γ) et (δ), intégrales respectives des équations

$$(\gamma) \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} y, \quad (\delta) \quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{cotg} y,$$

y étant lié à x par l'équation (F). On consultera, pour l'étude de ces courbes, la solution de M. Gambier. Je me borne à indiquer qu'une courbe (γ) quelconque est asymptote à une courbe périodique. Les courbes (δ) jouissent d'une propriété analogue.