$\frac{dy}{dx}$ est positif à l'extérieur de la courbe (C), nul sur la courbe et négatif à l'intérieur.

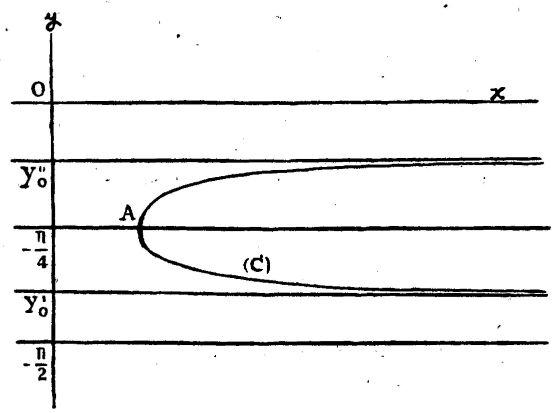

Fig. 1.

Les courbes sur lesquelles $\frac{dy}{dx}$ est égal à une constante donnée $\left(\text{supérieure à } \frac{4a^2-1}{4a}\right)$ sont analogues à (C) et s'emboîtent les unes dans les autres.

6. — *Remarque générale de comparaison des diverses équations* (F). — Le deuxième membre de (F) est une *fonction croissante de* a. Donc si deux intégrales des équations $F(a)$ et $F(a')$ où a' est supérieur à a, passent en un même point d'abcisse x_0, *pour* x *supérieur à* x_0 *la première intégrale* (correspondant à a) *est située constamment au-dessous de la deuxième* (correspondant à a').

Nous utiliserons souvent cette remarque.

Passons à l'étude détaillée de chaque cas.

Premier cas : $a > \frac{1}{2}$.

7. — Limitons d'abord l'étude à celle des portions des courbes intégrales situées dans la bande définie plus haut (n° 2).

Désignons par $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $x(0)$, $x\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ les abscisses des points d'intersection d'une telle portion avec les droites d'ordonnées $-\frac{\pi}{2}$, 0, $+\frac{\pi}{2}$. Ces abscisses sont rangées par ordre de grandeur croissante: sur la portion de courbe étudiée, x est fonction croissante de y.

Lorsque y est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0, $\frac{dy}{dx}$ vérifie les inégalités:

$$a(1+\operatorname{tg}^2 y)+\operatorname{tg} y \operatorname{th} x(0) < \frac{dy}{dx} < a(1+\operatorname{tg}^2 y)+\operatorname{tg} y \operatorname{th} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

d'où l'on déduit:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^2 y\, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x\left(-\frac{\pi}{2}\right)} < x(0) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$< \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^2 y\, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x(0)}$$

et l'on constate, sur ces inégalités, que $x(0) - x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est borné supérieurement et inférieurement, quelle que soit la valeur de $x(0)$; de plus, lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$, cette différence converge uniformément vers:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^2 y\, dy}{a + \sin y \cos y} .$$

Lorsque y est compris entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$, $\frac{dy}{dx}$ vérifie les inégalités:

$$a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x(0) < \frac{dy}{dx} < a(1 + \operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right) ,$$

d'où l'on déduit:

$$\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y\, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x\left(+\frac{\pi}{2}\right)} < x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$$

$$< \int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y\, dy}{a + \sin y \cos y \operatorname{th} x(0)} .$$

Mêmes conclusions que précédemment. Lorsque $x(0)$ tend vers $+\infty$, la différence $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x(0)$ converge uniformément vers:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y\, dy}{a + \sin y \cos y} .$$

En résumé $x\left(+\frac{\pi}{2}\right)-x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *est borné supérieurement et inférieurement* $\left(\text{respectivement par } \frac{4a\pi}{4a^2-1} \text{ et par } \frac{\pi}{4a}\right)$ *et, lorsque* $x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *tend vers* $+\infty$, *se rapproche indéfiniment de*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y\, dy}{a+\sin y \cos y} = \frac{\pi}{\sqrt{4a^2-1}} .$$

8. — On passe des portions de courbes intégrales précédentes aux portions situées dans la bande:

$$x \leqq 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y < +\frac{\pi}{2}$$

par symétrie par rapport à 0; puis aux courbes intégrales tout entières par une suite de translations parallèles à Oy, et de grandeur $k\pi$, k étant un entier positif ou négatif.

Les points de la courbe intégrale, qui ont pour ordonnées $\frac{\pi}{2}+k\pi$, jouissent de la propriété suivante, qui est une traduction de la propriété du n° 7: *la différence* $x\left[\frac{\pi}{2}+k\pi\right]-x\left[\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi\right]$ *de deux points consécutifs tend vers* $\frac{\pi}{\sqrt{4a^2-1}}$ *lorsque* k *tend vers* $\pm\infty$.

En ces points, la tangente à la courbe intégrale est parallèle à Oy.

9. — La régularité limite des points précédents nous conduit à la question suivante: *la courbe intégrale de* (F) *se rapproche-t-elle indéfiniment d'une courbe périodique lorsque* x *tend vers* $\pm\infty$? (il suffit de considérer le cas de $+\infty$).

La fonction th x tendant vers 1 quand x tend vers $+\infty$, *cette courbe périodique ne peut être qu'une intégrale de l'équation:*

$$\frac{dy}{dt} = a(1+\operatorname{tg}^2 y)+\operatorname{tg} y . \qquad (1)$$

Comparons les valeurs des abcisses x et t correspondant à la valeur y de l'ordonnée, sur une courbe intégrale de (F) et sur une courbe intégrale de (1); la relation:

$$\frac{d(x-t)}{dx} = \frac{\sin y \cos y}{a+\sin y \cos y}(1-\operatorname{th} x)$$

entraîne les inégalités:

$$\frac{d(x-t)}{dx} > -\frac{2}{2a-1}e^{-2x} \tag{2}$$

$$\frac{d(x-t)}{dx} < \frac{2}{2a+1}e^{-2x}\ . \tag{2'}$$

Désignons par X et T les valeurs des abscisses (respectivement supérieures à x et t) correspondant à une valeur Y de l'ordonnée, supérieure à y. De (2) et de (2′) on déduit:

$$\mathrm{X}-\mathrm{T}-\frac{1}{2a-1}e^{-2\mathrm{X}} > x-t-\frac{1}{2a-1}e^{-2x} \tag{3}$$

$$\mathrm{X}-\mathrm{T}+\frac{1}{2a+1}e^{-2\mathrm{X}} < x-t+\frac{1}{2a+1}e^{-2x} \tag{3'}$$

inégalités qui vont nous servir à établir qu'à une courbe intégrale de (F) correspond une courbe périodique asymptote, intégrale de l'équation (1).

Soit une suite de valeurs de X tendant vers $+\infty$:

$$\mathrm{X}_1\ ,\ \mathrm{X}_2\ ,\ \ldots\qquad \mathrm{X}_n\ ,\ \ldots \tag{4}$$

et soit (c_1), (c_2), ... (c_n) ... la suite correspondante de courbes intégrales de l'équation (1), coupant aux points d'abcisses (4) la courbe intégrale étudiée de l'équation (F); autrement dit: $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}_1$; ... $\mathrm{T}_n = \mathrm{X}_n$; ...

A l'ordonnée y correspondent: d'une part l'abscisse x de la courbe intégrale de (F), d'autre part une suite infinie t_1, t_2, ... t_n, ... d'abscisses de points situés sur les courbes (c_1), (c_2) ... (c_n) ...; ces abscisses vérifient les inégalités:

$$\frac{1}{2a+1}\left[e^{-2\mathrm{X}_n}-e^{-2x}\right] < x-t_n < \frac{1}{2a-1}\left[e^{-2x}-e^{-2\mathrm{X}_n}\right]$$

déduites des inégalités (3) et (3′). La quantité $|x-t_n|$ est donc bornée et les t_n admettent au moins une valeur limite [1], soit t. Parmi les indices n, choisissons une suite infinie d'indices tels que les t_n correspondant tendent vers t; quitte à supprimer s'il le faut des X_n, nous pouvons supposer que les t_n tendent tous vers t (pour ne pas introduire de nouvelles notations). Soit (c) la courbe intégrale de l'équation (1) passant par le point de coordonnées t et y. Toutes les courbes intégrales de l'équation (1) se déduisent de l'une d'elles par translation parallèle à Ox, de sorte qu'en désignant par T l'abscisse du point de (c) possédant même ordonnée que le point de (c_n) d'abscisse $\mathrm{T}_n = \mathrm{X}_n$, les différences $\mathrm{T}-\mathrm{T}_n$ et $t-t_n$ sont égales.

---

[1] Ils n'en admettent d'ailleurs qu'une. Ce point résulte de la suite du raisonnement.

Des inégalités (3) et (3′) on déduit alors les inégalités:

$$(t_n - t) - \frac{1}{2a+1}\left(e^{-2x} - e^{-2X_n}\right) < x - t < (t_n - t)$$
$$+ \frac{1}{2a-1}\left(e^{-2x} - e^{-2X_n}\right) .$$

La courbe (c) est fixe; l'indice n est quelconque. Lorsque n tend vers $+\infty$, les inégalités précédentes donnent:

$$-\frac{1}{2a+1}e^{-2x} \leqq x - t \leqq \frac{1}{2a-1}e^{-2x} . \tag{5}$$

La courbe intégrale étudiée de l'équation (F) *est donc asymptote à la courbe intégrale* (c) *de l'équation* (1), *courbe périodique* [1].

Les inégalités (6) fournissent une limite de la distance de la courbe étudiée et de sa courbe asymptote.

Deuxième cas: $a = \frac{1}{2}$.

10. — Etudions d'abord les portions situées dans la bande définie au nº 2.

L'équation (F) peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} y)^2 - \operatorname{tg} y\ (1 - \operatorname{th} x) . \tag{F′}$$

Les inégalités:

$$\frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 y) < \frac{dy}{dx} < \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} y)^2$$

valables lorsque y est positif, fixent pour la différence $x\left(+\frac{\pi}{2}\right) - x\,(0)$ la borne supérieure π et la borne inférieure 1. Précisons: x étant une

---

1 Dans le problème d'Agrégation de 1928 figurent l'étude des courbes (γ) et (δ), intégrales respectives des équations

$$(\gamma)\quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} y , \qquad (\delta)\quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{cotg} y ,$$

y étant lié à x par l'équation (F). On consultera, pour l'étude de ces courbes, la solution de M. Gambier. Je me borne à indiquer qu'*une courbe* (γ) *quelconque est asymptote à une courbe périodique*. Les courbes (δ) jouissent d'une propriété analogue.