

# DEUX THÉORÈMES SUR LES ONDES PAR IMPULSION

Autor(en): **Bouligand, Georges**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23254>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

paramètre du point d'intersection de la suite de points (31) et de la droite  $m_2 \widehat{m}_3$ .

Le réseau possède donc un triangle fondamental formé par les trois points  $m_1, m_2, m_3$ . A chacun de ces points et, en même temps, à la droite opposée un paramètre binaire est associé:  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ .

Le réseau contient les trois faisceaux (du type III) joignant deux à deux les trois suites singulières et, sur chaque droite ne passant par aucun point du triangle, la suite déterminée par ce fait que ses points d'intersection avec les droites du triangle ont comme paramètres les paramètres associés à ces droites.

Un plan de l'espace  $E_5$  représentatif, (lieu de  $\infty^2$  points et de  $\infty^2 E_4$ ) correspondant par dualité à soi-même, le triangle fondamental définit en même temps un réseau de suites de droites dont les suites singulières sont celles formées par l'ensemble d'une droite du triangle et du paramètre correspondant. Chaque suite de points du premier réseau est en involution avec chaque suite de droites du deuxième.

---

## DEUX THÉORÈMES SUR LES ONDES PAR IMPULSION

PAR

M. Georges BOULIGAND (Poitiers).

---

1. — Considérons un liquide parfait pesant, primitivement au repos, dans un bassin à paroi fixe. Posons, pour ce liquide, le problème des ondes *par impulsion*, de manière à réaliser un champ initial de vitesses très faibles, mais SANS SOUCI DE SAVOIR SI CE CHAMP EST OU NON TOURBILLONNAIRE.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants:

I. A l'ordre d'approximation consistant à regarder les termes non linéaires par rapport aux déplacements et aux vitesses

comme négligeables, le champ des tourbillons à un instant quelconque se confond avec sa détermination initiale.

II. Le mouvement de la surface, à cet ordre d'approximation, est complètement déterminé par la répartition initiale des vitesses sur la surface libre, notamment, dans le cas où les vitesses initiales superficielles sont nulles, la surface demeure plane et horizontale à l'ordre d'approximation précédent.

D'ailleurs, au lieu de se limiter aux ondes par impulsion, on pourrait supposer que non seulement, on imprime au liquide un certain état initial de vitesses très faibles, mais encore qu'on déforme très peu sa surface libre. On aurait une généralisation facile et immédiate des énoncés précédents.

2. — Désignons par  $\vec{V}(M, t)$  la vitesse au point géométrique  $M$  et à l'instant  $t$ . Les équations du mouvement lent seront (en prenant l'axe des  $z$  suivant la verticale ascendante)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} \left( gz + \frac{p}{\rho} \right), \\ \text{div } \vec{V} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Considérons le champ auxiliaire

$$\vec{W}(M, t) = \vec{V}(M, t) - \vec{V}(M, 0)$$

qui est celui de l'accroissement géométrique de la vitesse au point  $M$ , entre les instants 0 et  $t$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{W} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

donc le champ  $\vec{W}$  satisfait aux mêmes équations (1) que le champ  $\vec{V}$ : il en est une solution *initialement irrotationnelle*, donc d'après le théorème de Lagrange, une solution *constamment irrotationnelle*: ce théorème est ici immédiat, car d'après la première équation (1), la dérivée géométrique, par rapport à  $t$ , de  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$ , est nulle.

On a donc

$$\vec{W} = \text{grad } \varphi \quad \text{d'où} \quad \vec{V}(M, t) = \vec{V}(M, 0) + \text{grad } \varphi$$

la fonction  $\varphi$  étant harmonique et représentant le *potentiel de l'accroissement géométrique des vitesses* (entre 0 et  $t$ ). Le théorème I est donc établi.

3. — D'autre part, le flux de  $\vec{W}$  à travers toute portion de la paroi sera nul. En supposant que celle-ci admette un plan tangent, nous aurons donc, sur cette paroi

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0 \quad . \quad ^1 \quad (3)$$

Considérons enfin la surface libre, laquelle est définie par une équation de la forme

$$z = h(x, y, t)$$

$h$  représentant la dénivellation, qui demeure très faible, si l'on a pris pour plan des  $xy$  le plan de la surface libre au repos. En supposant les pentes très faibles, nous aurons, à chaque instant et en chaque point de cette surface

$$V_z = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4)$$

En posant

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (5)$$

la condition (4) s'écrit

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (6)$$

Ecrivons maintenant que la pression s'annule sur la surface libre. La première équation (1) appliquée à  $\vec{W}$ , s'écrit, en vertu de (2) et (5):

$$\text{grad} \left( \psi + gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad .$$

La fonction entre parenthèses ne dépendant que de  $t$ , on peut

<sup>1</sup> De cette équation, on déduit la conséquence suivante: dans un vase clos, à connexion simple, le potentiel  $\varphi$  serait nul, ainsi que  $\vec{W}$ . Donc le mouvement serait permanent.



la supposer nulle, puisque son gradient intervient seul. D'où la condition à la surface libre

$$\psi = -gz \quad (7)$$

Finalement,  $\psi$  doit être harmonique dans le domaine liquide, avoir sa dérivée normale nulle à la paroi, et satisfaire aux conditions (6) et (7) à la surface libre. Pour les exprimer à l'ordre d'approximation demandé, il suffit d'ailleurs de faire comme si le domaine liquide était invariable. Soit  $\gamma(M, P)$  la fonction de Neumann de la réunion de ce domaine et de son symétrique par rapport au plan  $xOy$ . D'après ce qui précède, nous sommes conduits à une mise en équations du mouvement superficiel indépendante de la présence des tourbillons. D'après ce qui est bien connu pour le cas du mouvement irrotationnel, nous aboutirons donc, dans tous les problèmes de petits mouvements, à l'équation intégrale-différentielle de M. Hadamard ou à l'équation équivalente <sup>1</sup>

$$2\pi h_p + \int_S \int \left( \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right)_M \gamma(M, P) dS_M = 0,$$

où  $S$  est la section du bassin par le plan des  $xy$  (surface libre au repos).

Le théorème II est donc établi.

4. — Si les impulsions données au liquide (primitivement au repos) n'affectent pas la surface libre,  $h$  et  $\frac{\partial h}{\partial t}$  seront initialement nulles. Donc  $h$  demeurera constamment nulle. La surface restera donc plane et horizontale. D'un autre côté, le système des tourbillons restant invariable, le mouvement sera permanent, et notamment, sera localisé dans la région affectée par l'impulsion initiale.

<sup>1</sup> BOULIGAND, *Sur divers problèmes de Dynamique des liquides*. Gauthier-Villars, Paris, 1930 (nos 15 et 22).