

# I. — L'ovale projection d'une courbe gauche.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES OVALES DE DESCARTES

PAR

M. DUFOUR (Nancy).

---

C'est au sujet de leurs applications à l'Optique que j'ai été conduit à m'occuper des ovals de Descartes. La présente note a pour but d'en exposer certaines propriétés d'une façon assez simple et intuitive <sup>1</sup>.

## I. — L'OVALE PROJECTION D'UNE COURBE GAUCHE.

On sait que l'intersection de deux cônes de révolution à axe vertical a pour projection horizontale une ovale de Descartes, et pour projection verticale sur le plan  $V$  passant par les axes des deux cônes une parabole à axe horizontal. Les foyers  $F_1$  et  $F_2$  de l'ovale sont les projections horizontales des sommets  $S_1$  et  $S_2$  des deux cônes. En faisant intervenir ainsi la géométrie dans l'espace, on peut établir assez simplement certaines propriétés de l'ovale.

### § 1. — *Les trois foyers ordinaires.*

Soient  $A'_1, A'_2, B'_1, B'_2$  les points d'intersection des génératrices situées dans le plan  $V$  (fig. 1). Les angles  $B'_1A'_1B'_2$  et  $B'_1A'_2B'_2$  étant l'un et l'autre égaux à la somme des demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ , les quatre points  $A'_1, A'_2, B'_2, B'_1$  sont sur une circonférence. Par suite les angles  $B'_2A'_1A'_2$  et  $B'_2B'_1A'_2$  sont égaux, et on en conclut sans peine que les deux droites

---

<sup>1</sup> Ce travail a été transmis à la Rédaction, par M. Elie Cartan, le 20 avril 1928.

$A'A_2$  et  $B_1B_2$  sont également inclinées sur la verticale. On peut donc les considérer comme étant deux génératrices d'un troisième cône de révolution à axe vertical ayant pour sommet leur point de rencontre  $S_3$ . L'intersection des deux cônes  $S_1$  et  $S_3$  a pour projection sur le plan V la même parabole à axe horizontal que l'intersection des cônes  $S_1$  et  $S_2$ , car les projections de ces deux courbes d'intersection passent par  $A_1, A_2, B_1, B_2$  et par quatre points ne passent que deux paraboles (dont les axes

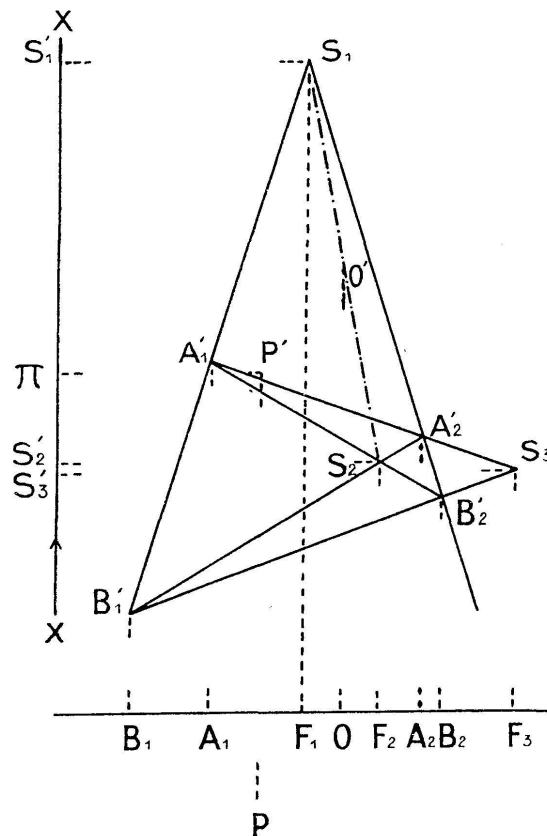


Fig. 1.

n'ont pas la même direction). Ainsi les trois cônes  $S_1, S_2, S_3$  ont une ligne commune dont la projection horizontale est une ovale de Descartes. Cette ovale peut donc être définie par deux quelconques des trois cônes et la projection horizontale  $F_3$  de  $S_3$  est son troisième foyer. L'ovale a deux foyers intérieurs  $F_1$  et  $F_2$  et un foyer extérieur placé du côté du sommet correspondant de la courbe à la plus petite valeur ( $F_2A_2 < F_1A_1$ ).

La ligne commune aux trois cônes se compose de deux portions à chacune desquelles correspond une ovale distincte. Nous pou-

vons donner à ces deux ovales conjuguées les noms d'*ovale intérieure* et d'*ovale extérieure*. Les deux ovales conjuguées, qui sont données par une même équation rationnelle du quatrième degré, présentent des caractères très différents en ce qui concerne leurs normales.

*Construction géométrique du troisième foyer.* — Supposons une ovale de Descartes donnée par deux de ses foyers ( $F_1$  et  $F_2$  par exemple) et par ses sommets  $A_1$  et  $A_2$ . Sur les lignes de rappel menées par  $A_1$  et  $F_1$ , prenons arbitrairement deux points  $A'_1$  et  $S_1$ , situées à des distances différentes de l'axe  $A_1A_2$ . Le cône  $S_1$  est défini par sa génératrice  $S_1A_1$ . L'intersection de son autre génératrice contenue dans le plan de la figure avec la ligne de rappel menée par  $A_2$  nous donne le point  $A'_2$ . Prenons sur la ligne de rappel menée par  $F_2$  le point  $S_2$  tel que les droites  $S_2A'_1$  et  $S_2A'_2$  fassent des angles égaux avec la verticale<sup>1</sup>. Ces droites déterminent les points  $B'_2$  et  $B'_1$ , et l'intersection de  $A'_1A'_2$  avec  $B'_1B'_2$  nous donne le sommet  $S_3$  qui se projette en  $F_3$  sur l'axe de l'ovale. En faisant varier les positions de  $A'_1$  et  $S_1$ , qui ont été prises arbitrairement sur les lignes de rappel, nous serions amenés à tracer des figures affines, et nous obtiendrions toujours le même point  $F_3$ .

On voit facilement comment il conviendrait de modifier la construction, si le foyer extérieur  $F_3$  figurait parmi les données.

*Calcul des coordonnées de  $S_3$ .* — Calculons les coordonnées du point  $S_3$  par rapport à un système d'axes rectangulaires  $O'_x, O'_y$  situés dans le plan  $V$ , l'axe des  $y$  étant parallèle aux axes des cônes, l'origine  $O'$  étant le milieu de  $S_1S_2$ . Soit  $2c$  la distance  $F_1F_2$  des deux foyers intérieurs et  $2d$  la différence des cotes de  $S_1$  et de  $S_2$ . Les coordonnées de  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement  $(-c, d)$  et  $(c, -d)$ . Dans le quadrilatère complet  $A'_1A'_2B'_2B'_1$ ,

<sup>1</sup> Ce point est à l'intersection de la ligne de rappel  $F_2S_2$  avec la droite passant par  $A'_1$  et par le symétrique de  $A'_2$  par rapport à cette ligne de rappel; ce point tombe à l'intérieur du cône  $S_1$ . — Nous avons supposé l'ovale donnée par deux foyers et par ses deux sommets. On pourrait supposer donnés les deux foyers et deux points quelconques de la courbe: il serait facile alors de déterminer les contours apparents des deux cônes correspondant à ces foyers, et on serait ramené au cas pour lequel est tracée la figure 1.

le faisceau  $S_1(A'_1, S_2, A'_2, S_3)$  est un faisceau harmonique. Dans ce faisceau, les deux génératrices de  $S_1$  ont pour équations

$$\Delta = y - d + \lambda_1(x + c) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta' = y - d - \lambda_1(x + c) = 0 .$$

L'équation de la droite  $S_1 S_2$  est de la forme  $\Delta + \mu \Delta' = 0$ . En exprimant que cette droite passe par  $S_2$  nous trouvons

$$\mu = \frac{\lambda_1 c - d}{\lambda_1 c + d} .$$

L'équation de la droite  $S_1 S_3$ , conjuguée de  $S_1 S_2$  par rapport à  $\Delta$  et  $\Delta'$  est  $\Delta - \mu \Delta' = 0$ , ou, réductions faites,

$$\lambda_1^2 cx + d \cdot y = -(\lambda_1^2 c^2 - d^2) .$$

Grâce au choix fait pour  $Ox$  et  $Oy$ , il nous suffit pour obtenir l'équation de  $S_2 S_3$ , de changer les signes de  $c$  et  $d$  et de remplacer  $\lambda_1$  par  $\lambda_2$ , ce qui donne

$$\lambda_2^2 cx + d \cdot y = \lambda_2^2 c^2 - d^2 .$$

Les coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  du point  $S_3$  sont les racines du système formé par ces deux équations. On a

$$\xi = -c \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + 2 \frac{d^2}{c} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad \text{et} \quad \eta = -d \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + 2 \frac{c^2}{d} \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} .$$

Ainsi  $\xi$  est la distance du foyer extérieur de l'ovale au milieu  $O$  de  $F_1 F_2$ . Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ ; supposons  $\alpha_2 > \alpha_1$ , alors  $\cot \alpha_2 < \cot \alpha_1$  ou  $\lambda_2 < \lambda_1$ . Comme  $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$  est positif,  $\xi$  a le signe de  $-c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 2d^2$ , c'est-à-dire de

$$2 \frac{d^2}{c^2} - \cot^2 \alpha_1 - \cot^2 \alpha_2 .$$

Mais  $d : c$  est la cotangente de l'angle aigu  $\beta$  que fait la droite  $S_1 S_2$  avec la verticale et, puisque la portion  $S_1 S_2$  de cette droite est intérieure aux deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ , on a  $\beta < \alpha_1 < \alpha_2$  et, par suite,  $\cot \beta > \cot \alpha_1 > \cot \alpha_2$ , et  $\xi$  est positif.

*Formes des deux ovales conjugués.* — Une droite ne peut couper l'ensemble des deux ovales conjugués en plus de quatre points, et, par suite, l'ovale intérieure en plus de deux points, l'ovale intérieure est donc toujours une courbe convexe; elle a une *forme ovale* au sens généralement attribué à ce mot. Le paramètre de la parabole dépend de la position de  $S_2$  et des valeurs des demi-angles au sommet des deux cônes  $S_1$  et  $S_2$ . Sur la figure le sommet de la parabole se trouve entre  $S_1$  et  $S_2$ : l'ovale extérieure, elle aussi est une courbe convexe. Mais si le sommet de la parabole vient se placer au-dessous de la génératrice  $B_1'B_2'$ , la projection horizontale de l'intersection des cônes tournera en son sommet  $B_2$  sa concavité vers l'extérieur. Si le sommet de la parabole est en  $B_1'$ ,  $B_2$  sera un point méplat.

Nous verrons plus loin comment il est possible, d'après l'équation de l'ovale, de se rendre compte de sa forme.

*Cas particuliers.* — Si  $S_1$  s'éloigne à l'infini dans la direction verticale, l'intersection est symétrique par rapport au plan horizontal mené par  $S_2$  et le sommet  $S_3$  est dans ce plan. L'axe de la parabole passe par  $S_2$  et  $S_3$ . L'ovale intérieure et l'ovale extérieure se confondent en une même circonférence de centre  $F_1$ ;  $F_2$  et  $F_3$  sont conjugués par rapport à cette circonférence double.

Si,  $S_2$  se déplaçant à l'intérieur du cône,  $S_1$  vient sur l'axe de ce cône, l'intersection se compose de deux circonférences horizontales et  $S_3$  s'éloigne à l'infini dans la direction horizontale. La parabole se décompose en deux droites parallèles; l'ovale intérieure et l'ovale extérieure deviennent deux circonférences concentriques ayant pour centres les deux foyers  $F_1$  et  $F_2$  confondus.

Si  $S_2$  est sur le cône  $S_1$ ,  $S_3$  coïncide avec  $S_2$ . L'intersection des cônes est une quartique gauche présentant un point double en  $S_2$ : sa projection sur le plan  $V$  est une parabole à axe horizontal tangente en  $S_2$  à la droite  $S_1 S_2$ ; sa projection horizontale est un limaçon de Pascal.

Si deux des cônes ont la même ouverture, le sommet du troisième s'éloigne à l'infini: la courbe d'intersection est plane. Sa projection horizontale est une ellipse de foyers  $F_1$  et  $F_2$

si les cônes  $S_1$  et  $S_2$  sont égaux, une hyperbole de foyers  $F_2$  et  $F_3$  si les cônes  $S_2$  et  $S_3$  sont égaux et de foyers  $F_3$  et  $F_1$  si les cônes  $S_3$  et  $S_1$  sont égaux.

## 2. — Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale.

Soient  $P$  et  $P'$  les projections sur le plan horizontal et sur le plan  $V$  d'un point quelconque de la courbe d'intersection des trois cônes, et  $\pi, S'_1, S'_2, S'_3$  les projections de ce point et des trois sommets sur un axe vertical pour lequel nous choisissons un sens positif  $XX'$ . Soient  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  les segments  $\pi S'_1, \pi S'_2, \pi S'_3$  et  $h_1, h_2, h_3$  les segments  $S'_2 S'_3, S'_3 S'_1, S'_1 S'_2$ . La relation de Chasles, appliquée successivement aux points  $S'_1, S'_2, S'_3; \pi, S'_1, S'_2; \pi, S'_1, S'_3; \pi, S'_2, S'_3$ , nous donne

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \quad (1)$$

$$\rho_1 + h_3 - \rho_2 = 0 \quad (2)$$

$$\rho_2 + h_1 - \rho_3 = 0 \quad (3)$$

$$\rho_3 + h_2 - \rho_1 = 0 \quad (4)$$

Multiplions respectivement (2) et (3) par  $h_1$  et par  $(-h_3)$  et ajoutons membre à membre; il vient

$$\rho_1 h_1 - \rho_2 (h_1 + h_3) + \rho_3 h_3 = 0$$

ou, en vertu de (1)

$$\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 = 0 \quad (5)$$

Soient  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  les distances du point  $P$  aux trois foyers  $F_1, F_2, F_3$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les valeurs au signe près des cotangentes des demi-angles au sommet des trois cônes. Convenons de donner à  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les signes respectifs de  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , nous aurons

$$\rho_1 = \lambda_1 \rho_1 \quad \rho_2 = \lambda_2 \rho_2 \quad \rho_3 = \lambda_3 \rho_3$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3$  étant toujours positifs.

<sup>1</sup> En exprimant  $h_1, h_2, h_3$  en fonction de  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , on a

$$\rho_1(\rho_3 - \rho_2) + \rho_2(\rho_1 - \rho_3) + \rho_3(\rho_2 - \rho_1) = 0$$

Etant données trois segments de même origine portés sur un même axe, la somme algébrique des produits de chacun d'eux par la différence des deux autres est nulle, puisque, dans cette somme, chaque produit de deux segments intervient deux fois et avec des signes contraires.

En y remplaçant  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  par ces valeurs, les relations (2), (3), (4) et (5) deviennent

$$\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0 \quad \lambda_2 \rho_2 - \lambda_3 \rho_3 + h_1 = 0 \quad \lambda_3 \rho_3 - \lambda_1 \rho_1 + h_2 = 0$$

$$h_1 \lambda_1 \rho_1 + h_2 \lambda_2 \rho_2 + h_3 \lambda_3 \rho_3 = 0$$

Ce sont les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale de Descartes, rapportées à ses foyers.

Si nous remarquons que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ , nous voyons que l'équation bipolaire étant rapportée aux deux foyers intérieurs  $F_1$  et  $F_2$ , le foyer extérieur  $F_3$  est du côté du foyer intérieur pour lequel le coefficient du rayon vecteur a la plus petite valeur absolue et que l'équation bipolaire étant rapportée à un foyer intérieur et au foyer extérieur, le rayon vecteur correspondant à ce dernier est affecté du coefficient le plus petit en valeur absolue.

Sur une équation bipolaire  $\lambda \rho + \lambda' \rho' - k = 0$ , il est facile de voir si les deux foyers auxquels elle est rapportée sont ou non de même nature. Remplaçons-y successivement  $\rho$  et  $\rho'$  par les rayons vecteurs  $(0, 2b)$  et  $(2b, 0)$  qui correspondent aux deux foyers: si  $2b\lambda' - k$  et  $2b\lambda - k$  ont le même signe les deux foyers sont intérieurs; dans le cas contraire, un des deux foyers est intérieur, l'autre est extérieur.

Nous avons (fig. 1)  $h_1 < 0, h_2 > 0, h_3 < 0$  et pour l'ovale intérieure  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ; pour l'ovale extérieure,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ .

Si nous désignons par  $k, \lambda$  et  $\lambda'$  des quantités essentiellement positives, et si nous supposons  $\lambda' > \lambda$ , le tableau suivant nous indique les formes que prennent les équations des deux ovales conjuguées suivant les foyers auxquelles elles sont rapportées.

Foyers	Ovale intérieure	Ovale extérieure
$F_1 F_2$	$\lambda \rho + \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$
$F_2 F_3$	$\lambda \rho - \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$
$F_3 F_1$	$\lambda \rho + \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$

Ce tableau montre également comment on passe d'une équation de l'ovale à celle de l'ovale conjuguée rapportée aux deux mêmes foyers.



Etant donnée une équation bipolaire, quand on a calculé la position du troisième foyer, on peut calculer les  $h$ .

Connaissant la position de deux foyers, il est aisé de trouver la position des sommets. Désignons par  $a_j$  ( $f$  étant égal à 1, 2 ou 3)  $a'_j$ ,  $b_j$ ,  $b'_j$  les distances respectives du foyer  $F_j$  aux sommets  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  des deux ovals conjugués, et supposons, par exemple, l'ovale donnée par l'équation bipolaire  $\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0$ . Exprimant que le sommet  $A_1$  est sur la courbe nous avons  $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 + h_3 = 0$ . Si nous appelons  $2b$  la distance des deux foyers  $F_1 F_2$ ,  $a_2 = a_1 + 2b$  et la relation précédente devient  $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 (a_1 + 2b) + h_3 = 0$ , d'où nous pouvons tirer  $a_1$ .

D'autre part,

$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = \lambda_2 a'_2 - \lambda_3 a'_3 = -h_1 .$$

D'où  $\lambda_3 (a_3 - a'_3) = \lambda_2 (a_2 - a'_2)$ , relation qui nous fait connaître  $\lambda_3$ . On pourrait, connaissant  $h_3$  et  $h_1$  avoir  $h_2$  par la relation  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ . Ainsi une des équations bipolaires d'une ovale étant donnée, nous pouvons trouver les deux autres équations bipolaires et l'équation tripolaire. Si l'ovale est donnée par ses trois foyers et son équation tripolaire, nous pouvons déterminer ses deux sommets et trouver ses équations bipolaires.

D'après le tableau qui précède, l'équation  $\lambda \rho - \lambda' \rho' = k$  représente toujours une ovale intérieure rapportée aux foyers  $F_2$  et  $F_3$ . Les autres formes d'équations bipolaires indiquent simplement que l'ovale est intérieure ou extérieure. Pour savoir à quels foyers elle est rapportée, il convient de chercher la position de ses sommets et celle du point milieu  $O$  de l'intervalle qui les sépare: la disposition des deux foyers connus par rapport à  $O$ , fait voir si ce sont  $F_1$ ,  $F_2$  ou  $F_3$ .

### 3. — L'ovale courbe anallagmatique.

Si on prend pour pôle un quelconque des trois foyers et pour axe la droite  $F_1 F_2 F_3$ , l'équation de l'ovale en coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  se présente sous la forme  $\rho^2 + P\rho + Q = 0$ ,  $P$  étant une fonction linéaire de  $\cos \theta$  et  $Q$  une constante. La transformation par rayons vecteurs réciproques autour du pôle

$\rho\sigma = Q$  conduit à l'équation  $Q + P\sigma + \frac{Q}{Q}\sigma^2 = 0$ . L'ovale est donc une courbe synallagmatique par rapport à chacun de ses foyers pris pour origine <sup>1</sup>.

Dans la figure 1, le quadrilatère inscriptible  $A'_1A'_2B'_2B'_1$  nous donne les relations

$$S_1 A'_1 \cdot S_1 B'_1 = S_1 A'_2 \cdot S_1 B'_2 \quad S_2 A'_1 \cdot S_2 B'_2 = S_2 A'_2 \cdot S_2 B'_1$$

$$S_3 A'_1 \cdot S_3 A'_2 = S_3 B'_1 \cdot S_3 B'_2 .$$

Les deux points de la quartique gauche qui sont sur une même génératrice du cône  $S_1$  correspondent l'un à l'ovale intérieure, l'autre à l'ovale extérieure et sont d'un même côté de  $S_1$ ; pour le cône  $S_2$  les deux points correspondent l'un à l'ovale intérieure, l'autre à l'ovale extérieure et sont de part et d'autre de  $S_2$ ; pour le cône  $S_3$ , les deux points correspondent tous deux soit à l'ovale intérieure, soit à l'ovale extérieure et sont d'un même côté de  $S_3$ . Chacune des ovals conjuguées est à elle-même son inverse par rapport à  $F_3$ , la puissance d'inversion  $m_3^2$  étant positive (cercle d'inversion réel passant par les points de contact des tangentes menées du foyer extérieur aux deux branches de la courbe. On a  $m_3^2 = a_3 \cdot a'_3 = b_3 \cdot b'_3$ ;  $a_3, a'_3, b_3$  et  $b'_3$  conservant les significations indiquées plus haut). Les tangentes menées du foyer extérieur à deux ovals conjuguées sont égales.

Les deux ovals conjuguées sont inverses l'une de l'autre par rapport à  $F_1$  et  $F_2$ : la puissance d'inversion  $m_1^2$  relative à  $F_1$  est positive (cercle d'inversion réel passant entre les deux courbes); la puissance d'inversion —  $m_2^2$  relative à  $F_2$  étant négative (cercle d'inversion imaginaire).

On a

$$m_1^2 = a_1 b_1 = a'_1 b'_1 \quad \text{et} \quad m_2^2 = a_2 b_2 = a'_2 b'_2 .$$

On trouverait aussi ces valeurs de  $m_1^2, m_2^2, m_3^2$  en calculant le terme constant  $Q$  de l'équation monopolaire qui correspond à chacun des trois foyers.

<sup>1</sup> L'ovale étant symétrique par rapport à l'axe  $F_1F_2F_3$  (puisque le plan  $V$  est un plan de symétrie pour les trois cônes), et la symétrie par rapport à un axe pouvant être considérée comme une inversion dont le centre s'est éloigné à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'axe de symétrie, l'ovale possède quatre origines d'anallagmatisme comme toute quartique bicirculaire.

Partons du sommet  $A_1$ : l'inversion  $m_1^2$  nous mène en  $B_1$ , puis l'inversion  $m_2^2$  nous mène en  $A_2$ , et enfin l'inversion  $m_3^2$  nous ramène en  $A_1$ . Donc  $m_1^2 \cdot m_2^2 \cdot m_3^2 = 1$ .

Le foyer  $F_3$  a même puissance par rapport aux deux cercles de diamètre  $A_1A_2$  et  $B_1B_2$ : il est donc sur leur axe radical. Puisque, connaissant l'équation bipolaire  $\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + h_3 = 0$  d'une ovale, on en déduit facilement l'équation de l'ovale conjuguée et la position des sommets de cette dernière, nous obtenons ainsi une seconde construction du foyer extérieur  $F_3$ . On voit sans peine que  $F_1$  et  $F_2$  pourraient aussi se trouver par une construction d'axe radical:  $F_1$  est sur l'axe radical des deux cercles décrits sur  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  comme diamètres, et la corde commune aux deux cercles décrits sur  $A_1B_2$  et  $A_2B_1$  comme diamètres passe par  $F_2$ .

*Cercle tangent à l'ovale et passant par deux points donnés dont un de ses foyers.* — L'inversion anallagmatique autour du foyer par lequel doit passer le cercle à construire transforme ce cercle en une droite tangente à l'ovale et passant par le point inverse de l'autre point donné. Le point inverse de son point de contact avec l'ovale est le point où le cercle à construire touche l'ovale. En particulier, le cercle passant par  $F_1$  et  $F_2$  et tangent à l'ovale se déduit par inversion autour du foyer  $F_1$ , par exemple, de la tangente à l'ovale conjuguée qui passe par l'inverse de  $F_2$ .

#### 4. — *Sécantes passant par un foyer.*

D'une propriété bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques, il résulte immédiatement que: 1° toute sécante à l'ovale menée par  $F_1$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points situés d'un même côté de l'axe où elle coupe les deux ovales conjugués; 2° toute sécante menée par  $F_2$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points situés de part et d'autre de l'axe où elle coupe ces deux ovales; 3° toute sécante menée par  $F_3$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points où elle coupe chacune des ovales intérieure et extérieure.

Si entre l'équation de l'ovale en coordonnées polaires rapportée à un de ses foyers et l'équation d'une droite quelconque de son plan

$$\rho(p \cos \theta + q \sin \theta) = r$$

on élimine  $\theta$ , on obtient une équation du quatrième degré en  $\rho$  dont les quatre racines sont les distances des foyers aux points d'intersection de la droite et de la courbe. Dans cette équation le quotient des coefficients de  $\rho^3$  et de  $\rho^4$  est une constante: donc la somme des quatre rayons vecteurs menés d'un foyer aux points d'intersection de la courbe avec une droite quelconque est constante. Nous pouvons le voir par des considérations géométriques simples dans le cas où la sécante passe par le foyer.

Par l'axe de l'un des cônes,  $S_1$  par exemple, menons un plan vertical quelconque  $V'$ . L'intersection de  $V'$  avec le cône  $S_2$  est une hyperbole à axe réel vertical. Le centre  $S'_2$  de cette hyperbole est toujours dans le plan horizontal qui passe par  $S_2$ , et l'angle de ses asymptotes est égal à l'angle au sommet du cône  $S_2$  (fig. 2).

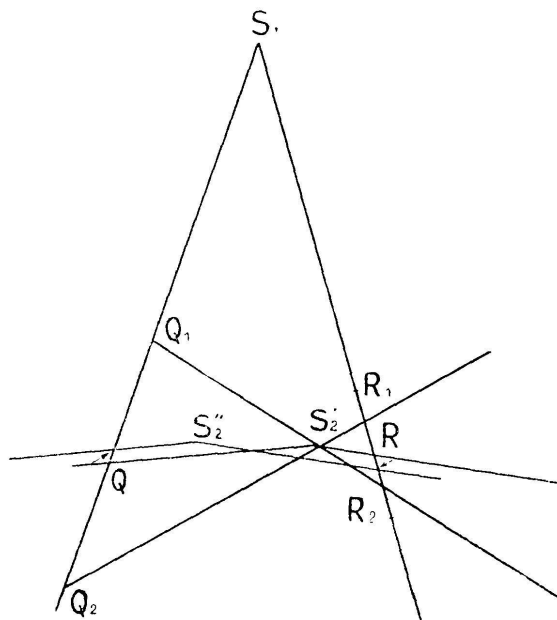


Fig. 2.

L'intersection de  $V'$  avec le cône  $S_1$  se compose de deux génératrices de ce cône. Soient  $Q_1, Q_2, R_1, R_2$  les points d'intersection de ces deux génératrices avec l'hyperbole, et  $S'_2Q, S'_2R$  les diamètres conjugués des cordes  $Q_1 Q_2$  et  $R_1 R_2$ . Ces diamètres sont

comme les cordes correspondantes également inclinés sur la verticale. Nous avons

$$S_1 Q_1 + S_1 Q_2 = 2S_1 Q \quad \text{et} \quad S_1 R_1 + S_1 R_2 = 2S_1 R .$$

Faisons tourner le plan  $V'$  autour de l'axe du cône  $S_1$ : l'angle des deux génératrices passant par  $S_1$  ne change pas,  $S_2'$  se déplace dans  $V'$  le long d'une droite horizontale et vient en  $S_2''$ . L'angle des asymptotes ne change pas et par suite le système des deux diamètres conjugués subit une translation horizontale: les déplacements de  $Q$  et  $R$  sur les génératrices de  $S_1$  sont égaux et de sens contraire et la somme  $S_1 Q + S_1 R$  reste constante, quelle que soit l'orientation de  $V'$ . Projétons sur la trace horizontale de  $V'$ : nous voyons que la somme des distances d'un foyer aux points d'intersection de la courbe avec une sécante quelconque passant par ce foyer est constante.

Si nous prenons comme sécante l'axe  $F_1 F_2$ , nous voyons de plus que la constante est la même pour les foyers  $F_1$  et  $F_2$ .

### 5. — *Le foyer singulier.*

Les trois points  $F_1, F_2, F_3$ , auxquels leur propriété optique a fait donner le nom de foyers, sont aussi des foyers répondant à la définition de Plücker: le calcul prouve que ce sont les points d'intersection de tangentes menées à l'ovale par les points cycliques du plan.

L'ovale possède aussi un *foyer singulier*: elle passe par les points cycliques du plan et a des asymptotes qui la touchent en ces points.

Si nous supposons que  $S_2$  se déplace sur la verticale  $F_2 S_2$  (fig. 1), c'est-à-dire si nous faisons varier  $h_3$  en laissant fixes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , nous obtenons une famille d'ovales définies par la relation  $\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$ , où  $h_3$  est un paramètre variable. Dans l'équation en coordonnées cartésiennes correspondante, les termes du quatrième et du troisième degré sont indépendants de  $h_3$ , et, par suite, toutes ces ovales ont les mêmes asymptotes<sup>1</sup>. Il nous

<sup>1</sup> L'équation cartésienne de l'ovale de Descartes ne diffère que par une constante de celle du limaçon qui fait partie de la famille. L'ovale est le lieu des points d'égale puissance par rapport au limaçon.

suffira donc d'étudier ces asymptotes dans le cas particulier où  $S_2$  est sur le cône  $S_1$ , où l'ovale devient un *limaçon de Pascal*. En regardant cette courbe comme une conchoïde de cercle, et en prenant comme pôle son point double et comme axe polaire son axe de symétrie, on écrit immédiatement son équation en coordonnées polaires

$$\rho = 2r \cos \theta + l \quad \text{ou} \quad \rho^2 - 2r\rho \cos \theta + l\rho = 0 .$$

Passant aux coordonnées cartésiennes rectangulaires, le pôle étant pris pour origine et l'axe polaire pour axe des  $x$ , on a

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = l^2(x^2 + y^2) .$$

Les points cycliques sont points doubles: les tangentes aux points cycliques y rencontrent la courbe en trois points confondus. Soit  $y = ix + \delta$  une de ces asymptotes; l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec la courbe doit avoir trois racines infinies. En portant la valeur  $y = ix + \delta$  dans l'équation de la courbe, et en exprimant que le coefficient de  $x^2$  est nul, nous obtenons la relation  $(\delta + ri)^2 = 0$ . Les points cycliques sont des points de rebroussement de l'ovale, et les asymptotes se coupent en un point réel ( $x = r, y = 0$ ) au centre du cercle de base du limaçon. Ce point est le *foyer singulier* commun aux ovals de la famille  $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$ <sup>1</sup>.

Calculons la valeur du rayon  $r$  en fonction de la distance  $2c$  des deux foyers et des coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous avons (fig. 3), en appelant C l'extrémité du diamètre du cercle de base du limaçon  $F_2C = 2r$ . D'après la définition de la conchoïde, ce cercle passe à égale distance de B et de A, points du limaçon situés sur son axe. On a  $2 F_2C = F_2A + F_2B$ .

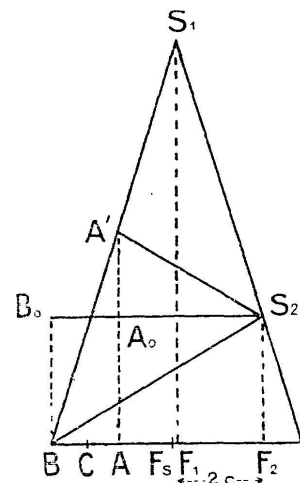


Fig. 3.

<sup>1</sup> Si nous supposons  $l = 2r$ , nous n'avons plus affaire à une ovale de Descartes, mais à une *cardioïde*. Le centre du cercle de base de la cardioïde est un foyer singulier.

D'autre part,

$$A_0 A' = \lambda_2 \cdot F_2 A = \lambda_1 (4c - F_2 A) \quad \text{d'où} \quad F_2 A = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$B_0 B = \lambda_2 \cdot F_2 B = \lambda_1 (F_2 B - 4c) \quad \text{d'où} \quad F_2 B = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Par suite

$$r = \frac{F_2 C}{2} = \frac{F_2 A + F_2 B}{4} = \lambda_1 c \left( \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Désignons par  $F_s$  le foyer singulier; ses distances aux trois foyers ordinaires sont <sup>1</sup>

$$F_s F_1 = \frac{2\lambda_2^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad F_s F_2 = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad F_s F_3 = 2 \frac{d^2}{c} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

$F_s$  est extérieur à l'intervalle  $F_1 F_2$  et placé du côté de  $F_1$ .

## II. — NORMALE A L'OVALE.

L'ovale étant donnée par l'équation  $\lambda\rho + \lambda'\rho' = h$  rapportée à deux foyers  $F$  et  $F'$ , nous prenons sur la courbe un point  $I$ ,

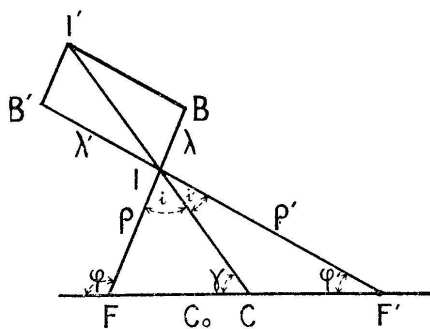


Fig. 4.

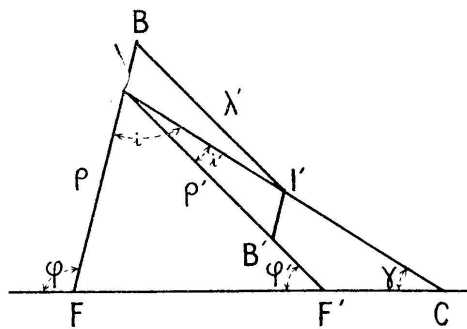


Fig. 5.

nous portons sur les rayons vecteurs  $FI$  et  $F'I$  des segments  $IB = \lambda$  et  $IB' = \lambda'$ , et nous complétons le parallélogramme  $BIB'I'$  (fig. 4 et 5): sa diagonale  $II'$  est la normale à l'ovale.

<sup>1</sup> En prenant  $F_s$  pour origine, l'équation cartésienne de l'ovale prend une forme où  $F_s F_1$ ,  $F_s F_2$  et  $F_s F_3$  interviennent de façon symétrique, se prêtant de façon commode à l'étude de la courbe.