

RÉFLEXIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Autor(en): **Dareste, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21873>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

RÉFLEXIONS¹

SUR L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL INFINITÉSIMAL

PAR

E. DARESTE (Paris).

Nous nous proposons de soumettre à tous ceux savants, professeurs et élèves, qui par goût ou par nécessité se livrent à l'étude du Calcul infinitésimal, quelques réflexions relatives aux deux points suivants :

- 1^o Impropropriété de quelques expressions en usage.
- 2^o Divergences de vues des mathématiciens.

Nous croyons que ces deux genres de faits, sont de nature à introduire dans l'esprit des débutants et à y laisser pour toujours des idées vagues et même fausses. Il n'y a pas apparence, en effet que, à part quelques sujets, exceptionnellement doués, la généralité des élèves des Ecoles, dans la nécessité où elle se trouve de s'assimiler, dans un temps relativement court, une somme considérable de connaissances scientifiques, prenne le temps de méditer longuement sur certaines difficultés, qui ne sont pas suffisamment commentées devant eux. Celles d'ailleurs, qui sont inhérentes à la nature même du sujet, sont assez réelles et nombreuses pour qu'on évite avec soin d'y ajouter d'autres qui elles, seraient bien facilement évitables.

¹ Nous rappelons à nos lecteurs que la rubrique « Correspondance » leur permet de présenter les remarques que peut suggérer la lecture de cet examen critique de l'enseignement du calcul infinitésimal. — N.d.l.R.

I. — LES DEUX SENS DU MOT « INFINI »,
SENS ÉTYMOLOGIQUE ET SENS DÉRIVÉ.

Pour plus de clarté, nous prendrons les choses d'un peu loin.

Il est une notion qui vient spontanément à notre esprit parce qu'elle est dans la force même des choses. Elle peut se formuler comme suit.

Une quantité variable peut croître au delà de toute limite. — Ce concept a été représenté par le symbole d'un huit couché « ∞ » et, par le mot « infini » que, pour éviter toute confusion, nous remplacerons par l'expression « infiniment grand ». Mais comme l'« infiniment grand » n'existe pas dans le monde matériel et, n'est qu'une pure abstraction, comme, par définition même, aucune valeur ne peut lui être attribuée, comme aucun nombre ne peut le représenter, il nous est impossible de le préciser et de pénétrer le mystère qui l'enveloppe.

C'est bien là le sens qu'en mathématiques élémentaires on attribue au mot « infini », et qui est conforme à son étymologie, savoir : sans limite.

Il n'en est malheureusement pas de même pour l'analyse infinitésimale. Dans cette science, le même mot a été adopté pour représenter une idée très différente de la précédente (elle en est même séparée par un abîme). Dans ce deuxième sens, « infini » est synonyme de très grand. De même « infiniment petit » est synonyme de très petit.

Nous savons bien que, dans le langage courant, on a pris l'habitude (consacrée par le dictionnaire) d'employer le mot « infini » dans ce deuxième sens, ou sens dérivé, et que les mathématiciens n'ont fait que se conformer à l'usage; nous répondons à cette objection possible que les abus de langage, si fréquents dans les questions dépendant de la vie pratique, parce qu'ils y sont inévitables, ne sont pas à leur place dans les sciences en général et, à plus forte raison, dans les sciences exactes. Sous peine d'ambiguïté ou d'équivoque, un seul mot doit y représenter une seule chose : j'appelle un chat un chat.

De l'expression « Infini absolu ». — J. HOUËL (*Cours de calcul infinitésimal*, 1881) est évidemment de cet avis. Cet auteur évite

l'ambiguïté en employant dans chacun des deux cas une expression différente. Conservant à l'« infini » pris dans le sens dérivé, la désignation d'« infini » tout court (ou d'infini mathématique, cette dernière déjà employée par Carnot), il adopte pour l'infini — pris dans le sens primitif, celui qu'en mathématiques élémentaires on appelle « infini » tout court — l'expression d'*Infini absolu*. Voici comme il s'exprime (Tome I, Livre I, chap. I) :

« De même, il faut bien se garder de confondre l'*infiniment* « grand mathématique, soit avec le *très-grand* opposé au *très-petit* dans l'ordre des idées physiques, soit avec l'*infini absolu* « pris dans le sens vulgaire et métaphysique... »

« L'*infini absolu* exclut toute idée de limitation et de détermination « et ne peut faire, par conséquent, l'objet d'aucune spéculation « mathématique. »

Cette nouvelle désignation, si elle a l'avantage de supprimer une ambiguïté, a par contre l'inconvénient de créer une complication inutile, en instituant deux expressions différentes pour la même idée, savoir : « infini » tout court, employé en mathématiques élémentaires et « infini absolu » qui serait employé en calcul infinitésimal.

L'expression « *infiniment petit* » ne peut être prise que dans le sens dérivé. — Revenant au concept formulé précédemment nous pouvons évidemment le compléter comme suit :

Par contre la même quantité variable ne peut décroître que jusqu'à une limite bien nette qui est zéro.

Si donc, arrêtant cette quantité dans son mouvement de décroissance, nous la fixons momentanément dans une position aussi voisine que nous voudrions de sa limite, nous reconnaitrons que nous avons ainsi déterminé une valeur très petite, mais plus grande que zéro, bien réelle par conséquent, pouvant être exprimée en chiffres et n'ayant rien de mystérieux.

On peut serrer la question de plus près en supposant que la quantité variable décroît suivant une loi déterminée, et en représentant cette décroissance graphiquement.

Soit une droite OA, la longueur OA représentant la valeur de la variable à un moment donné.

Faisons d'abord l'hypothèse que le point A se rapproche du

point O par bonds décroissants de façon à occuper successivement les points $A_3, A_2, A_1 \dots A_n$ tels que l'on ait

$$A A_1 = \frac{OA}{2}$$

$$A_1 A_2 = \frac{OA_1}{2} = \frac{OA}{4}$$

$$A_2 A_3 = \frac{OA_2}{2} = \frac{OA}{8}$$

$$A_3 A_4 = \frac{OA_3}{2} = \frac{OA}{16}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{n-1} A_n = \frac{OA_{n-1}}{2} = \frac{OA}{2^n}$$

Le point A se rapprochera indéfiniment du point O sans jamais l'atteindre; autrement dit la quantité variable décroîtra indéfiniment sans jamais s'annuler. On pourra donc, au premier abord avoir l'impression de l'infini, et il est bien possible que là se trouve la raison de l'adoption de l'expression de « quantité infiniment petite ».

Un peu de réflexion montrera que c'est une illusion, car nous pouvons faire cette autre hypothèse que, les bonds successifs sont de grandeur constante et égaux à une fraction $\frac{1}{n}$ de la variable OA, et dans ce cas le point A finira toujours par atteindre le point O, autrement dit la quantité variable s'annulera toujours quelque petite que soit la fraction $\frac{1}{n}$.

Par contre l'infiniment grand ne peut jamais être atteint quelle que soit la loi de croissance que l'on choisisse.

Et ceci montre bien que le concept d'« infini » qui s'applique si naturellement à la grandeur, c'est-à-dire aux quantités croissantes, qu'il a fallu inventer un mot pour les représenter, ne s'applique pas à la petitesse, c'est-à-dire aux quantités décroissantes.

On trouve cette idée déjà exprimée par M. BOUSSINESQ dans son cours d'*Analyse infinitésimale* (1887).

« L'infiniment petit considéré dans sa valeur zéro, non dans

« l'infinité des degrés décroissants que parcourt pour l'atteindre
 « la quantité continue indéfiniment divisible, *n'est pas infini*,
 « *mais nul*; et il comporte, à cet égard, une connaissance aussi
 « nette, aussi précise que tout autre état déterminé de la grandeur,
 « contrairement à ce qui nous arrive pour l'infini (limite exté-
 « rieure de la quantité grandissante), dont la vue distincte
 « nous échappe, ou que, pour ainsi dire nous ne pouvons pas
 « regarder en face, quoique l'idée indirecte que nous en avons
 « soit, comme disait Pascal, absolument indispensable au
 « géomètre. »

Si maintenant on se reporte à la définition des « infiniment petits » en prenant par exemple le texte de Lazare CARNOT (*Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, 1797):

« J'appelle « quantité infiniment petite » toute quantité qui est
 « considérée comme continuellement décroissante; tellement
 « qu'elle puisse être rendue aussi petite qu'on le veut, sans
 « qu'on soit obligé pour cela de faire varier celle dont on cherche
 « la relation. »

ou bien le texte plus abrégé d'auteurs contemporains (Sonnet, par exemple):

« On appelle infiniment petit une quantité qui tend vers zéro,
 « et que l'on considère dans un état très voisin de sa limite. »

On voit clairement que cette expression n'a de sens que si elle est synonyme de « très petit », c'est-à-dire si le mot « infini » est pris dans son sens dérivé, comme on le fait depuis Leibnitz.

L'Abbé Moreux propose l'expression « *indéfiniment petit* ». — La constatation de l'impropriété de l'expression « infiniment petit » ne nous est pas personnelle; elle a été faite très nettement par l'Abbé Moreux. Dans l'ouvrage qu'il a publié récemment sous le titre *Pour comprendre le Calcul différentiel*, on remarque le passage suivant:

« Si l'on prétendait, en effet, l'évaluer, le définir, le fixer au
 « moyen d'un nombre, notre infiniment petit aurait toujours la
 « possibilité de devenir moindre que ce nombre, puisqu'il peut
 « par définition se rapprocher sans cesse de zéro. Et c'est pour-
 « quoi, *au lieu du terme infiniment petit on aurait dû, dès le début,*
 « *dire indéfiniment petit. L'expression cette fois, n'aurait plus*
 « *aucune ambiguïté*, et renfermerait en quelque sorte l'idée de

« variation, qu'on perd trop souvent de vue lorsqu'on fait du calcul infinitésimal. »

C'est la première fois, croyons-nous, sans pouvoir cependant l'affirmer, que cette critique se trouve exprimée explicitement. Si d'autres savants ont pensé comme l'Abbé Moreux, aucun n'a cru devoir formuler son opinion, de crainte, sans doute, de troubler des habitudes contractées depuis longtemps. Bien à tort, à notre avis; nous ne verrions que des avantages à abandonner une expression défectueuse.

Nous citerons encore Lazare CARNOT. Ce savant, dans son ouvrage intitulé *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, 1797, n'a pas, il est vrai, formulé une critique explicite au sujet des expressions en question, mais il est remarquable que, lorsqu'il se trouve dans le cas d'avoir à en employer une, presque toujours il lui adjoint un mot ou une expression qui a tout l'air d'être une correction ou une réserve.

En voici des exemples:

1^o Quantités *dites* infiniment petites;

2^o Quantités *dites* infinitésimales;

3^o Quantités *appelées* infiniment petites;

4^o Quantités *que nous nommons* infiniment petites;

5^o C'est en cela que réside le véritable caractère des quantités auxquelles on a donné le nom d'infiniment petites et non dans la ténuité dont la dénomination semble supposer, etc.

Ce n'est pas tout; à la première page de son livre on trouve le passage suivant:

« Je parle ici conformément aux idées vagues qu'on se fait communément des quantités dites infinitésimales— lorsqu'on n'a pas pris la peine d'en examiner la nature. »

Ayant constaté l'existence de ces idées vagues (qui probablement existent encore) Carnot s'applique à montrer comment la vraie nature des « quantités infiniment petites » doit être entendue, puis craignant sans doute que les lecteurs, dans le cours de leur travail, ne perdent de vue ses définitions et ses explications, et ne se laissent influencer par l'impropriété des expressions infinitésimales, s'astreint, chaque fois qu'il en emploie une, à les mettre en garde, par le moyen indiqué plus haut, contre toute équivoque ou toute ambiguïté.

Bien qu'il ne le dise pas, et qu'il attribue l'existence d'idées vagues à une étude trop sommaire, on peut supposer qu'il pensait comme nous; c'est-à-dire que ces idées vagues étaient, au moins en grande partie, la conséquence d'expressions mal choisies.

Il eut été préférable que, abandonnant ces expressions, il adoptât celles dont se servit Pascal, un jour que l'illustre savant se trouvait dans le cas d'avoir à parler des mêmes choses et, que l'expression de « quantités infiniment petites » n'avait pas encore été inventée. Carnot connaissait si bien, d'ailleurs, les expressions Pascaliennes que lui-même les signale aux lecteurs, à propos de son exposé de la géométrie des indivisibles qui, imaginée par Cavalieri eut une grande vogue avant l'apparition du Calcul infinitésimal, et permit à Pascal de faire quelques-unes de ses découvertes. Carnot, citant donc un écrit de Pascal, le fait suivre d'un commentaire dont nous extrayons ce qui suit :

« Ce passage est remarquable non seulement en ce qu'il prouve
 « que les géomètres savaient très bien apprécier le mérite de la
 « méthode des indivisibles; mais en ce qu'il prouve que la *notion*
 « *de l'infini mathématique, dans le sens même qu'on lui attribue*
 « *aujourd'hui*, n'était point étrangère à ces géomètres; car il
 « est clair, par ce qu'on vient de citer de Pascal, qu'il attachait
 « au mot *indéfini*, la même signification que nous attachons au
 « mot « *infini* », qu'il appelait simplement « *petit* » ce que nous
 « appelons « *infiniment petit* », et qu'il négligeait sans scrupule
 « ces petites quantités vis-à-vis des quantités finies, etc... »

Nous ne laisserons pas échapper, en passant, l'occasion que Carnot nous donne et dont il n'a pas voulu profiter lui-même, de regretter que les expressions employées par Pascal n'aient pas été conservées; elles étaient préférables dans leur simplicité, à celles qui, inventées depuis et adoptées par tous les savants, sont encore en usage aujourd'hui.

CONSÉQUENCES DE L'ADOPTION DE L'EXPRESSION « QUANTITÉ INFINIMENT PETITE »

1^o L'expression « *quantité infiniment grande* » est prise dans le sens dérivé.

L'adoption regrettable de l'expression « *quantité infiniment*

petite » qui entraîne l'application au mot « infiniment » du sens dérivé, a pour conséquence immédiate que le même sens dérivé doit être également attribué à l'expression « quantité infiniment grande ». La définition de l'« Infiniment grand » qui se déduit, comme on sait, de la notion de l'« infiniment petit » est la suivante :

L'unité divisée par une quantité « infiniment petite » est ce qu'on nomme une « quantité infiniment grande ».

On se rend compte qu'une fraction ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur une quantité très petite, mais finie, est elle-même une quantité finie, pouvant être exprimée en chiffres. C'est donc une quantité très grande, excessivement grande si l'on veut, et si on l'appelle « quantité infiniment grande », c'est que là encore, l'infini est pris dans son acception dérivée.

2^o Dans le Calcul Intégral c'est, suivant les cas, l'un ou l'autre des deux sens qui est applicable.

Nous avons encore à noter une autre conséquence qui ne s'applique qu'à la deuxième partie de l'analyse infinitésimale, c'est-à-dire au Calcul intégral dont les opérations consistent à faire la somme d'une infinité d'infiniments petits; que ceux-ci soient des longueurs des surfaces ou des volumes.

L'idée, très ancienne, et dans laquelle on doit voir l'origine du Calcul intégral, d'étudier les propriétés d'une courbe en la remplaçant par un polygone inscrit ou circonscrit, dont le nombre des côtés peut être aussi grand que l'on veut, se rencontre fréquemment dans les traités de mathématiques, où elle est formulée comme suit, ou de manière analogue.

« En regardant une courbe comme un polygone d'un nombre « infini de côtés chacun infiniment petit... »

Partant des conventions sur les infiniments petits ce membre de phrase est absolument correct, mais cela n'empêche que si l'on considère un infiniment petit lorsqu'il a atteint sa limite zéro, ce que beaucoup de mathématiciens considèrent comme légitime (voir la deuxième partie de cet opuscule), le même membre de phrase libellé comme suit, serait tout aussi correct.

« En regardant une courbe comme un polygone d'un nombre « infini de côtés chacun égal à zéro... »

Seulement dans ce cas spécial il est clair que le mot « infini » serait pris dans son sens étymologique ou primitif.

Ainsi, suivant que l'« infiniment petit » est considéré pendant la période où il passe par la série de ses valeurs décroissantes, ou bien au moment où il atteint la valeur zéro, le mot « infini » est pris dans son sens dérivé ou dans son sens étymologique.

Voilà donc encore une complication et, une raison de plus pour remplacer l'expression « infiniment petit » par une autre plus juste.

En recourant, par exemple, aux expressions de Pascal, le libellé deviendrait le suivant.

« En regardant une courbe comme un polygone d'un nombre « très grand de côtés très petits... »

Ou bien en adoptant la proposition de l'Abbé Moreux, il se présenterait comme suit:

« En regardant une courbe comme un polygone d'un nombre « infini de côtés indéfiniment petits... »

Ou d'autres façons encore, pourvu que le mot « infini » y soit remplacé par un autre choisi d'un commun accord entre savants.

II.

Dans les années qui suivirent la publication des travaux de LEIBNIZ relatifs à l'Analyse infinitésimale, le nouveau calcul suscita de nombreuses controverses parmi les mathématiciens, qui se partagèrent en deux camps.

Il s'agissait de déterminer la véritable nature des infiniment petits. Suivant les uns ces quantités, tout en pouvant devenir aussi petites qu'on le veut, devaient toujours être différentes de zéro; suivant les autres, au contraire, elles devaient être toujours égales à zéro.

Nous ne pouvons mieux faire que de citer EULER, qui dans la préface et le chapitre 3 de son ouvrage *Institutiones Calculis Differentialis*, 1755, expose avec une grande clarté les deux points de vue.

Premier point de vue:

« La plupart de ceux qui enseignent les lois du Calcul intégral

« distinguent les différentielles du zéro absolu et établissent une
 « espèce particulière de quantités infiniment petites qui ne
 « s'évanouissent pas entièrement, mais gardent une certaine
 « quantité qui serait plus petite que toute quantité assignable. »

.
 Deuxième point de vue:

« La doctrine de l'infini sera mieux illustrée si nous exposons
 « ce qu'est l'infiniment petit des mathématiciens. Il n'y a pas
 « de doute que toute quantité peut diminuer jusqu'à s'évanouir
 « entièrement et rentrer dans le néant. Mais une quantité infi-
 « niment petite n'est autre chose qu'une quantité évanouissante,
 « c'est pourquoi elle sera véritablement $= 0$. On formule aussi
 « une définition des infiniment petits, lorsqu'on dit qu'ils sont
 « plus petits que toute quantité assignable; si, en effet, une
 « quantité est si petite, qu'elle est plus petite que toute quantité
 « assignable, *elle ne peut pas ne pas être nulle*, car si elle n'était
 « pas égale à zéro on pourrait déterminer une quantité qui lui
 « serait égale, ce qui est contraire à l'hypothèse. »

On voit que Euler était partisan convaincu du deuxième point de vue.

Lazare Carnot, dans le but qu'il se propose de rapprocher ces points de vue, d'en montrer les rapports et d'en proposer de nouveaux, étudia la question de très près. Bien que ne cachant pas une certaine préférence pour le premier (en quoi il se rencontre avec l'illustre mathématicien Lagrange) il reconnaît cependant que l'on peut tout aussi légitimement considérer les infiniment petits comme égaux à zéro que comme différents de zéro.

Voici ce qu'il en dit à diverses reprises dans l'ouvrage déjà cité:

« Il semble néanmoins que les quantités infiniment petites
 « étant des variables, *rien n'empêche qu'on ne puisse leur attribuer*
 « *la valeur zéro aussi bien que toute autre.* »

« On est donc entièrement maître, en soumettant au calcul les
 « quantités que nous avons nommées infinitésimales, de regarder
 « ces quantités comme *effectives* ou comme *absolument nulles*... »
 « ...« Il suit de ce que nous venons de dire qu'on peut à volonté
 « considérer les quantités infiniment petites comme *absolument*
 « *nulles*, ou comme de véritables quantités. »

Les auteurs contemporains: DUHAMEL, Camille JORDAN, COURNOT, SERRET, SONNET, donnent la définition des infiniment petits accompagnés de commentaires, mais sans aborder généralement ce point particulier, estimant, peut-être que la question ayant été réglée par Carnot, il n'y a pas lieu d'y revenir.

Ainsi on peut citer BOUSSINESQ (*Cours d'Analyse infinitésimale*, 1887) qui admet implicitement que l'« infiniment petit » peut aussi bien avoir la valeur zéro que des valeurs finies, comme le prouve le passage suivant, déjà cité:

« L'infiniment petit *considéré dans sa valeur zéro* non dans l'infinité des *degrés décroissants* que parcourt pour l'atteindre la *quantité continue indéfiniment divisible, n'est pas infini, mais nul.* »

Un cependant, J. Houël, émet une restriction un peu imprécise dans deux passages de l'ouvrage déjà cité.

« La limite d'une variable est une quantité constante dont la variable diffère d'une quantité infiniment petite, *sans que cette différence puisse en général s'annuler.* »

« Un infiniment petit *n'est pas généralement nul et, ce n'est qu'exceptionnellement* qu'il peut passer par la *valeur zéro.* »

L'opinion de l'Abbé Moreux, exprimée dans le récent ouvrage, déjà cité, attire particulièrement l'attention. Le savant Abbé prend nettement position pour le premier point de vue dans les termes suivants:

« L'infiniment petit *n'est pas davantage une quantité nulle, elle est bien en fait différente de zéro*, mais elle peut s'en rapprocher autant qu'on le désire... »

« ...C'est pour cette raison que les géomètres disent de l'infiniment petit que c'est une quantité évanouissante; *celle-ci ne disparaît jamais*, mais elle devient si infime qu'elle échappe à toute fixation précise... »

« ...Voilà la vraie notion de l'infiniment petit, et ce qui nous donne une véritable idée de la propriété essentielle de l'infiniment petit que nous utiliserons en mathématiques, celle de pouvoir devenir moindre que toute quantité définie, si petite soit-elle, c'est-à-dire de tendre vers zéro, *sans cependant arriver à être nulle.* »

Supposons qu'un débutant, au lieu de se contenter, comme c'est le cas le plus général, d'étudier uniquement le cours de son professeur, ou l'ouvrage de son choix, ait le goût et le loisir de faire de la bibliographie; on peut penser que la comparaison de ces divers textes et la constatation de leurs divergences lui causeront un peu de surprise et de découragement.

Il pourrait même arriver qu'il perdît un peu de sa confiance dans les théories mathématiques, ce qui serait un résultat fâcheux, car nous pensons que cette question particulière constitue un fait unique, ou presque, dans les sciences exactes.

En général l'existence de toutes les questions de mathématiques: faits, lois, théorèmes, notions, quelque soit le nom qu'on leur donne, ne peut donner matière à discussion. Ainsi, par exemple, en est-il du fait que la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, bien qu'elle se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, a dans chaque cas particulier une valeur bien définie, qui est elle-même une fonction de la même variable indépendante que la fonction y .

Cette loi mathématique intéressante, curieuse, est hors de toute contestation.

La notion de l'infini, ce mot étant pris dans son sens étymologique, elle aussi, est indiscutable.

Le cas des quantités dites « infiniment petites » est bien différent. Dire qu'on va employer des quantités variables, que cette propriété de variabilité s'exercera dans le sens de la décroissance, que cette décroissance pourra être poussée aussi loin qu'il le faudra pour que les quantités puissent devenir plus petites que toute quantité donnée, n'est pas découvrir une loi mathématique, pas plus qu'une notion s'imposant à l'esprit. Nous ne voyons là rien autre chose qu'établir une convention, que forger de toutes pièces une définition. Il pouvait donc arriver, et il est arrivé en effet, que les savants, préoccupés de rigueur mathématique, ont voulu compléter la définition. Mais s'ingéniant, chacun suivant la nature de son esprit, à donner à cette définition une précision qu'elle ne comporte peut-être pas, ils ont été trop loin et, ont abouti à ces divergences qui dureront probablement toujours. Autrement dit, il est possible que pour

avoir voulu trop bien faire, on n'ait réussi qu'à compliquer et à embrouiller la question.

C'est pourquoi, nous plaçant au seul point de vue de l'intérêt des étudiants, nous pensons que l'enseignement, imitant en cela ce qu'il fait par nécessité pour la philosophie, ainsi que pour les sciences physiques et naturelles, devrait les mettre franchement au courant des incertitudes de la question, et des divergences de vues des grands mathématiciens, en leur faisant un court historique de l'invention du Calcul Infinitésimal.

Nous pensons qu'il ne serait pas inutile de réserver une place dans cet historique pour quelques indications sur les recherches de Lagrange exposées dans le grand ouvrage qu'il publia sous le titre de Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Les inconvénients signalés plus haut étant ainsi évités, le professeur pourrait faire connaître sa manière de voir à ses élèves; mais ceux-ci seraient libres de l'adopter de confiance, ou bien de creuser la question, pour se faire une opinion personnelle.

Quelques mots encore au sujet des différentielles, auxquelles s'applique naturellement ce que nous avons dit en dernier lieu des infiniment petits. Il se pourrait que, là aussi, on ait créé une complication inutile, en distinguant les différentielles des différences; désignées respectivement par les lettres d et Δ , car on introduit ainsi dans les esprits cette idée, ou tout au moins cette impression que, les unes et les autres sont de natures essentiellement *dissemblables*.

Sans insister autrement, nous ferons seulement remarquer que, avant nous, J. Houël a eu la même pensée, qu'il a mise en pratique dans son ouvrage déjà cité, après en avoir, dans la préface présenté la justification qui se termine ainsi.

« Il m'a donc semblé superflu de désigner ces quantités tour à tour par deux caractéristiques différentes Δ et d , cette double notation ne pouvant avoir pour effet que d'obscurcir dans l'esprit des commençants la vraie notion de l'infiniment petit »
