

Deuxième Partie: Applications.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ainsi donc

$$(p, p') = \Sigma (x_1 y_2) (\xi_3 \eta_4) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix},$$

et d'après § 2

$$= 6\lambda \cdot V,$$

donc d'après § 3

$$= \lambda \cdot \delta \cdot \sin V.$$

Ainsi

$$\delta \cdot \sin V = \lambda' \cdot (p, p'). \quad (3)$$

DEUXIÈME PARTIE: APPLICATIONS.

§ 5. — Applications à la théorie des connexes ternaires.

1. — Soient (x, u) , (y, v) deux éléments (point, droite) du plan connexe, et soient a la droite (xy) , A le point (uv) . Les coordonnées de A sont proportionnelles aux mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Donc l'aire du triangle Axy , à un facteur près dépendant du choix du système des coordonnées, est représentée par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix} \equiv \Sigma (u_i v_k) (x_i x_k) \equiv u_x v_y - v_x u_y$$

donnée dans mon mémoire cité plus haut.

Mais nous pourrions considérer un autre triangle, notamment celui formé par les droites $u, v, a \equiv (xy)$. D'après une formule connue (G. SALMON, *Sections coniques*, n° 39, p. 53) son aire a pour expression

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (xy)_1 & (xy)_2 & (xy)_3 \end{vmatrix}^2}{(u_1 v_2) (v_1 (xy)_2) \cdot ((xy)_1 u_2)},$$

ou bien, calculs faits:

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)(x_3 v_y - y_3 v_x)(u_x y_3 - u_y x_3)} ,$$

formule qui n'est pas symétrique.

Cherchons une autre formule plus symétrique. Soient $\bar{x}$, $\bar{y}$ les points d'intersection de la droite $(x, y) \equiv a$ avec les droites u et v ; de sorte que $u_{\bar{x}} = 0$, $v_{\bar{y}} = 0$. On peut alors poser

$$\bar{x} = \lambda x + \mu y , \quad \bar{y} = \lambda' x + \mu' y ,$$

avec

$$\lambda u_x + \mu u_y = 0 , \quad \lambda' v_x + \mu' v_y = 0 .$$

Pour fixer les valeurs absolues de λ , μ , λ' , μ' ajoutons les relations

$$\lambda + \mu = 1 , \quad \lambda' + \mu' = 1 .$$

Alors

$$\lambda = \frac{-u_y}{u_x - u_y} , \quad \mu = \frac{u_x}{u_x - u_y} ,$$

$$\lambda' = \frac{-v_y}{v_x - v_y} , \quad \mu' = \frac{v_x}{v_x - v_y} .$$

L'aire double du triangle $A\bar{x}, \bar{y}$ ($\equiv uva$) est donc, à un facteur constant près,

$$\begin{vmatrix} (uv)_1 & (uv)_2 & (uv)_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \end{vmatrix} \equiv (\lambda\mu' - \mu\lambda') \begin{vmatrix} (uv)_1 & (uv)_2 & (uv)_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_x - u_y)(v_x - v_y)} .$$

La même formule peut être établie en calculant directement les coordonnées des points $\bar{x}$, $\bar{y}$ par les équations

$$u_{\bar{x}} \equiv u_1 \bar{x}_1 + u_2 \bar{x}_2 + u_3 \bar{x}_3 = 0 , \quad (\bar{x} x_2 y_3) = 0 ,$$

ce qui donne

$$\frac{\bar{x}_1}{x_1 u_y - y_1 u_x} = \frac{\bar{x}_2}{x_2 u_y - y_2 u_x} = \frac{\bar{x}_3}{x_3 u_y - y_3 u_x} .$$

De même les équations $v_y = 0$, $(\bar{y} x_2 y_3) = 0$ donnent :

$$\frac{\bar{y}_1}{x_1 v_y - y_1 v_x} = \frac{\bar{y}_2}{x_2 v_y - y_2 v_x} = \frac{\bar{y}_3}{x_3 v_y - y_3 v_x} .$$

Enfin, les coordonnées du point A sont proportionnelles à

$$(u_2 v_3) , \quad (u_3 v_1) , \quad (u_1 v_2) .$$

Donc, l'aire double du triangle $A\bar{x}\bar{y}$, à un facteur près, est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 u_y - y_1 u_x & x_2 u_y - y_2 u_x & x_3 u_y - y_3 u_x \\ x_1 v_y - y_1 v_x & x_2 v_y - y_2 v_x & x_3 v_y - y_3 v_x \\ u_2 v_3 - u_3 v_2 & u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{vmatrix} \equiv (u_x v_y - u_y v_x) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix} \\ \equiv (u_x v_y - u_y v_x)^2 .$$

Reste à déterminer le facteur de proportionnalité (dans le cas du système considéré au § 1).

D'après (1) pour le premier point :

$$\begin{aligned} 2\Delta_0 &= \Sigma a_i V_i = H(u_y \Sigma a_i x_i - u_x \Sigma a_i y_i) \\ &= 2\Delta_0 (u_y - u_x) H \dots H = \frac{1}{u_y - u_x} . \end{aligned}$$

De même pour le second point nous trouvons

$$H' = \frac{1}{v_y - v_x} ,$$

et nous arrivons de nouveau à la formule

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_y - u_x)(v_y - v_x)} .$$

2. — Soit à présent (y, v) l'élément du connexe conjugué qui correspond à l'élément (x, u) . Alors

$$u_y = 0 , \quad v_x = 0 .$$

L'expression du moment se ramène à

$$- u_x v_y .$$

Pour de telles paires d'éléments les deux triangles, dont nous avons parlé au n° 1 coïncident, et les deux expressions de l'aire sont identiques.

Le triangle se ramène à un point (une droite) dans deux cas:

1° u passe non seulement par y , mais aussi par x .

$$u_x = 0 .$$

2° v passe non seulement par x , mais aussi par y :

$$v_y = 0 .$$

Donc: *le moment de deux éléments correspondants d'un connexe ternaire et de son conjugué s'annule si l'un ou l'autre appartient à la coïncidence principale correspondante.*

REMARQUE. — Dans le cas général de deux éléments (x, u) , (y, v) quelconques leur moment s'annule dans les trois cas:

1° Les points x et y coïncident;

2° Les droites u et v coïncident;

3° Le point A est sur la droite a .

3. — *Connexe bilinéaire* (collinéation):

$$f \equiv a_x u_a \equiv \Sigma a_{ik} \alpha_i u_k = 0 . \quad (1)$$

Les éléments correspondants

$$\rho y_i = a_x \alpha_i , \quad \sigma v_i = a_i u_a \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

forment le connexe conjugué

$$(abv)(\alpha\beta\eta) = 0 .$$

Si l'on calcule le dernier, on obtient (changeant y, v en x, u)

$$i^2 \cdot g(x, u) = u_x (i^2 - i_1) - 2if + 2f_1 .$$

De (2) on déduit

$$v_y = a_x u_\beta b_\alpha \equiv f_1(x, u) ,$$

$$v_x = \Sigma a_i x_i u_a = u_a a_x = f(x, u) ,$$

$$u_y = a_x \Sigma \alpha_i u_i = a_x u_a = f(x, u) .$$

Donc

$$u_x v_y - u_y v_x \equiv u_x f_1(x, u) - f^2(x, u) .$$

Ainsi les éléments du connexe bilinéaire pour lesquels le moment (au sens du n° 2) est nul appartiennent au connexe identique ou à $f_1(x, u) = 0$, — ce n'est qu'un cas particulier de ce qui a été dit au n° 2 pour le connexe général.

Enfin, si l'élément (x, u) n'appartient pas au connexe (1), le moment de (x, u) et de son transformé par (1) est nul, s'il appartient au connexe (2, 2)

$$u_x f_1(x_1 u) - f^2(x_1 u) = 0$$

dans lequel à chaque droite u correspond une courbe de 2^{me} ordre ayant double contact avec la conique dégénérée — paire de droites u et u'' et pour corde de contact la droite u' , si l'on désigne les transformées collinéaires successives de u en collinéation (1) par $u', u'', \dots$

Réciproquement, au point donné x appartient une courbe de 2^{me} classe passant par les points x, x'' et dont les tangentes correspondantes se coupent en x' .

§ 6. — *Le moment dans la théorie des connexes avec élément (point, plan).*

Comme j'ai indiqué au commencement, la notion du moment de deux droites trouve son application dans la théorie des connexes quaternaires ayant pour l'élément la combinaison (point, plan). Si l'on prend deux éléments pareils $(x, u), (y, v)$, leurs points x, y déterminent une droite $p \equiv (xy)$, et leurs plans u, v une autre $p' = (uv)$. On peut donc déterminer le moment de ces droites, et c'est ce que je nomme *le moment de deux éléments du connexe* (x, u) .

Son expression analytique s'exprime par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} \equiv \Sigma (x_i y_k - x_k y_i) (u_i v_k - u_k v_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) ,$$

car $p'_{12} = \pi_{34} = (u_3 v_4)$ et ainsi de suite.

Donc, à un facteur près, nous avons

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x u \\ y v \end{pmatrix} &\equiv \Sigma (u_i x_i v_k y_k - v_k x_k u_i y_i - v_i x_i u_k y_k + u_k x_k v_i y_i) \\ &\equiv 2 (u_x v_y - u_y v_x) . \end{aligned}$$

Prenons un élément (x, u) quelconque et son correspondant dans le connexe conjugué (y, v) . Nous aurons pour le moment de ses deux éléments

$$M \begin{pmatrix} (x, u) \\ (y, v) \end{pmatrix} = \frac{2}{\rho \sigma} \left(u_k \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} - mn f^2(x, u) \right) ,$$

parce que

$$\rho y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} , \quad \sigma v_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} ,$$

donc

$$\begin{aligned} \rho \cdot u_y &= \Sigma u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = n \cdot f(x, u) , \\ \sigma \cdot v_x &= \Sigma x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = m \cdot f(x, u) . \end{aligned}$$

Si l'élément (x, u) appartient au connexe $f(x, u) = 0$, son moment par rapport à l'élément correspondant du connexe conjugué devient

$$\rho \sigma \cdot M \begin{pmatrix} x u \\ y v \end{pmatrix} \equiv u_x \cdot \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} .$$

Ainsi, si l'élément (x, u) appartient à la coïncidence principale du connexe donné

$$(f(x, u) = 0 , \quad u_x = 0)$$

ou son correspondant (y, v) appartient à la coïncidence principale du connexe conjugué, le moment de ces deux éléments est nul.

La réciproque est vraie: si le moment d'un élément du connexe donné et de son correspondant au connexe conjugué est nul, l'un ou l'autre appartiennent à la coïncidence principale correspondante.

Nous pouvons dire encore: Si pour chaque élément du connexe donné $f(x, u) = 0$ nous avons

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 ,$$

ou si l'on a identiquement

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} \equiv k \cdot f(x, u)$$

le moment de chaque élément et de son conjugué au connexe $f(xu) = 0$ est nul. Dans ce cas le connexe conjugué du (1) est le connexe identique ¹.

§ 7. — Moment de deux droites dans la théorie des connexes aux éléments (point, droite) dans le R_3 .

1. — Considérons un connexe lineo-linaire défini par l'équation

$$\Sigma a_{i, kj} x_i p_{kj} = 0 \quad (1)$$

que l'on peut écrire aussi

$$\Phi(x; p) \equiv \Sigma \Phi_j x_i \equiv \Sigma \Phi_{kj}^{(1)} p_{kj}$$

ou symboliquement

$$a_x(aapp) \equiv a_x a_p^2$$

De l'ensemble des ∞^7 éléments (point, droite) de l'espace, l'équation (1) détache ∞^6 éléments, que l'on peut caractériser de cette manière: à chaque point X correspondent (c'est-à-dire forment avec X l'élément de la configuration) ∞^3 droites du complexe linéaire

$$P(x) \equiv \Sigma \Phi_{kj}^{(1)} p_{kj} = 0; \quad (2)$$

parmi ces complexes il y a ∞^2 complexes spéciaux, qui correspondent aux points d'une surface du 2^{me} ordre

$$\Phi_{12}^{(1)} \Phi_{34}^{(1)} + \Phi_{13}^{(1)} \Phi_{42}^{(1)} + \Phi_{14}^{(1)} \Phi_{23}^{(1)} = 0 \equiv a_x a'_x (ab a'b') \quad (3)$$

A chaque point de cette surface correspond une droite, avec

¹ Ceci donne l'idée de considérer les connexes qui sont des transformations rationnelles du connexe identique: si nous avons un connexe quaternaire

$$\Sigma_k \varphi_k(x, u) \psi_k(x, u) = 0 \quad (k = 1 \dots 4)$$

où φ_k — du degré k en x et du h en u , et ψ_k — du degré $m - k$ en x , $n - h$ en u , à l'aide de la transformation $\varphi u_k = \varphi_k(x, u)$, $\sigma v_k = \psi_k(x, u)$, nous le transformons en $v_y = 0$.

les coordonnées $\Phi_{kj}^{(1)}$, l'axe du complexe linéaire spécial (2). Donc chaque complexe P_x sera spécial si l'équation (3) s'annule identiquement, ce qui a lieu quand les coefficients $a_{i,kj}$ remplissent 10 relations

$$a_{i,12} a_{k,34} + a_{i,34} a_{k,12} + a_{i,13} a_{k,42} + a_{i,42} a_{k,13} \\ + a_{i,14} a_{k,23} + a_{i,23} a_{k,14} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ce qui s'écrit symboliquement

$$(a_k a'_i + a'_k a_i) (a b a' b') = 0.$$

La surface (3) peut présenter les divers cas de dégénérescence sur lesquels nous n'insistons pas davantage pour le moment.

2. — Avec le point x forment l'élément de la configuration toutes les droites de l'espace, dont les coordonnées x_i remplissent les conditions

$$\Phi_{kj}^{(1)} = 0 \quad (k, j = 1, 2, 3, 4)$$

au nombre de 6. En éliminant $x_1 \dots x_4$ on voit que doivent être nuls les déterminants du tableau

$$\begin{vmatrix} a_{1,12} & a_{1,13} & a_{1,14} & a_{1,23} & a_{1,24} & a_{1,34} \\ a_{2,12} & a_{2,13} & a_{2,14} & a_{2,23} & a_{2,24} & a_{2,34} \\ a_{3,12} & a_{3,13} & a_{3,14} & a_{3,23} & a_{3,24} & a_{3,34} \\ a_{4,12} & a_{4,13} & a_{4,14} & a_{4,23} & a_{4,24} & a_{4,34} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

ce qui donne en somme 15 relations, dont 3 seulement indépendantes. Si les conditions sont toutes remplies, les mineurs du 3^{me} ordre n'étant pas tous nuls, on reçoit un système défini des valeurs $x_1 x_2 x_3 x_4$, qui déterminent un *point fondamental* du connexe linéo-linéaire (1): par exemple, pour le connexe

$$x_2 p_{12} + x_3 p_{13} + x_4 p_{14} = 0 \quad (a)$$

le tableau (4) prend la forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tous les mineurs s'annulent identiquement, et parmi les déterminants du 3^{me} ordre il y en a un qui n'est pas zéro :

$$\begin{vmatrix} a_{2,12} & a_{2,13} & a_{2,14} \\ a_{3,12} & a_{3,13} & a_{3,14} \\ a_{4,12} & a_{4,13} & a_{4,14} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Le point $x_2 = 0 = x_3 = x_4$ est le *point fondamental*, ce que l'on voit d'ailleurs directement de (a).

3. — Prenons à présent quelque droite déterminée. Dans le connexe (1) lui correspond le plan

$$\Sigma \Phi_i^{(1)} x_i = 0 \quad (5)$$

en général bien déterminé, — seuls les points de ce plan forment des éléments du connexe (1) avec la droite choisie.

Mais il existe des droites qui forment l'élément du (1) avec chaque point de l'espace, qu'on peut appeler les *droites fondamentales*; elles sont définies par des équations

$$\Phi_i^{(1)} = 0 , \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (6)$$

ce sont donc des droites communes à quatre complexes linéaires (6), elles sont donc au nombre de *deux*. En effet si le déterminant Δ est différent de zéro

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,14} & a_{1,24} & a_{1,34} & a_{1,23} \\ a_{2,14} & a_{2,24} & a_{2,34} & a_{2,23} \\ a_{3,14} & a_{3,24} & a_{3,34} & a_{3,23} \\ a_{4,14} & a_{4,24} & a_{4,34} & a_{4,23} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7)$$

on peut résoudre (6) par rapport à $p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{23}$ (ou pour quelques autres quatre p_{kj} dont le déterminant correspondant de la matrice (4) est différent de zéro), et on peut écrire

$$\Delta p_{ik} = b_{ik} p_{12} + c_{ik} p_{13} , \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

$$b_{12} = c_{13} = \Delta , \quad b_{13} = c_{12} = 0 .$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0 ,$$

on a l'équation du 2^{me} degré

$$Ap_{12}^2 + Bp_{12}p_{13} + Cp_{13}^2 = 0 \quad (9)$$

où l'on a

$$\begin{cases} A = \Delta \cdot b_{34} + b_{14} b_{23} , \\ B = \Delta \cdot b_{34} + \Delta b_{32} + b_{14} c_{23} + b_{23} c_{14} , \\ C = \Delta \cdot c_{42} + c_{14} c_{23} . \end{cases} \quad (10)$$

Les droites fondamentales sont donc réelles et distinctes si

$$B^2 - 4AC > 0 ,$$

imaginaires, si

$$B^2 - 4AC < 0 ,$$

elles coïncident, si

$$B^2 - 4AC = 0 . \quad (11)$$

Dans le premier cas on pourrait supposer, qu'il peut arriver que les deux droites fondamentales se rencontrent. Mais il n'est pas difficile de montrer, que *si les droites fondamentales ont un point commun, elles ont tous leurs points en commun, c'est-à-dire elles coïncident*, la condition d'intersection étant aussi (11):

$$B^2 - 4AC = 0 .$$

On peut le démontrer par le calcul de la manière suivante. Soient $\bar{p}$ et $\bar{p}'$ deux droites fondamentales de (1). Alors les rapports des coordonnées $\frac{\bar{p}_{12}}{\bar{p}_{13}}$ et $\frac{\bar{p}'_{12}}{\bar{p}'_{13}}$ doivent vérifier l'équation (9).

Donc

$$\frac{\bar{p}_{12}}{\bar{p}_{13}} + \frac{\bar{p}'_{12}}{\bar{p}'_{13}} = -\frac{B}{A} , \quad \frac{\bar{p}_{12} \cdot \bar{p}'_{12}}{\bar{p}_{13} \cdot \bar{p}'_{13}} = \frac{C}{A}$$

ou bien

$$\frac{\bar{p}_{12} \cdot \bar{p}'_{12}}{C} = \frac{\bar{p}_{12} \cdot \bar{p}'_{13} + \bar{p}_{13} \cdot \bar{p}'_{12}}{-B} = \frac{\bar{p}_{13} \cdot \bar{p}'_{13}}{A} = k . \quad (k \neq 0)$$

Mais

$$\Delta \cdot \bar{p}_{14} = b_{14} \bar{p}_{12} + c_{14} \bar{p}_{13}$$

$$\Delta \cdot \bar{p}'_{14} = b_{14} \bar{p}'_{12} + c_{14} \bar{p}'_{13}$$

d'après (8).

Substituons ces valeurs en

$$\Delta^2(\bar{p}, \bar{p}') .$$

Nous aurons après quelques calculs

$$\Delta^2(\bar{p}, \bar{p}') = k(4AC - B^2) \quad (12)$$

ce qui prouve le théorème énoncé et montre en même temps la relation qui existe entre l'expression $4AC - B^2$ et le moment de deux droites fondamentales du connexe (1).

Ainsi à chaque connexe linéo-linéaire (1) appartient une certaine caractéristique, indépendante du choix des coordonnées, qui détermine la position réciproque des deux droites fondamentales du connexe, c'est *le moment des deux droites fondamentales*.

SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES

PAR

Georges VALIRON (Strasbourg).

Je me propose d'étendre dans cette note les théorèmes relatifs aux fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine aux fonctions quasi-analytiques satisfaisant à certaines conditions.

1. — La famille des fonctions $f(x)$, dérivables et de dérivée uniformément bornée sur un segment $a \leq x \leq b$, ($|f'(x)| < M$ quelle que soit la fonction et quel que soit x sur (a, b)), est une famille de fonctions également continues. Il s'ensuit que, *si une suite de fonctions $f(x; n)$ de la famille converge sur un ensemble E de points denses sur le segment (a, b) , cette suite converge uniformé-*