

# 11. Composantes du rotationnel.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tende vers zéro quand  $n$  augmente indéfiniment, ainsi que :

$$\left| \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} - \int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_n \right|$$

Or :

$$\int_{\Sigma_n} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{v}_n d\sigma_n = \int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_n \quad (13)$$

car il est clair que l'on a :

$$\int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_r = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{C_i} \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

$C_i$  étant une face triangulaire quelconque de  $\Sigma_n$ , car tout côté appartenant à deux triangles à la fois de  $\Sigma_n$  sera parcouru dans les deux sens, et les intégrales de  $\vec{V} \cdot d\vec{M}$  correspondantes se détruiront; finalement il ne restera que les intégrales relatives aux côtés de la courbe limite  $\Gamma_n$ . On déduit alors immédiatement l'identité (12) de l'équation (13) en tenant compte de ce que nous avons dit plus haut. Le théorème de Stokes se trouve ainsi établi.

*Remarque:* La formule de Stokes montre que l'intégrale :

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{v} d\sigma$$

prise sur toute surface fermée  $\Sigma$  est identiquement nulle. On en déduit alors facilement que le champ vectoriel  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$ , défini par l'équation (11) admet partout une divergence qui satisfait à l'identité remarquable :

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0$$

comme dans le cas classique où les composantes de  $\vec{V}$  auraient des dérivées des deux premiers ordres.

#### 11. Composantes du rotationnel.

Nous allons établir le théorème fondamental suivant :

*Soit le vecteur :*

$$\vec{V} = \vec{x}P(x, y, z) + \vec{y}Q(x, y, z) + \vec{z}R(x, y, z)$$

et  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point quelconque de l'espace de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ . Considérons les vecteurs :

$$\vec{V}_1 = \vec{y}R(x_0, y, z) - \vec{z}Q(x_0, y, z)$$

$$\vec{V}_2 = \vec{z}P(x, y_0, z) - \vec{x}R(x, y_0, z)$$

$$\vec{V}_3 = \vec{x}Q(x, y, z_0) - \vec{y}P(x, y, z_0)$$

chacun d'eux admet en  $M$  une DIVERGENCE CIRCULAIRE CENTRÉE, et les valeurs de ces divergences sont respectivement égales aux composantes en  $M$  du rotationnel de  $\vec{V}$ .

Le théorème est bien exact dans le cas où  $P, Q, R$  sont dérivables par rapport à  $(x, y, z)$ ; en effet ces divergences sont :

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Nous allons montrer qu'il est encore vrai dans le cas actuel plus général.

Soit  $C$  un cercle de centre  $M$ , de rayon  $\rho$  contenu dans le plan mené par  $M$  perpendiculairement à  $Ox$ .

La formule de Stokes nous donne :

$$\int_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot d\sigma = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{M}.$$

Or :

$$\vec{v} = \vec{x}; \quad \vec{V} \cdot d\vec{M} = [\vec{y}Q(x_0, y, z) + \vec{z}R(x_0, y, z)] \cdot d\vec{M}.$$

Soit  $\vec{n}$  la normale au cercle  $C$  dirigée vers l'extérieur. On a facilement :

$$[\vec{y}Q(x_0, y, z) + \vec{z}R(x_0, y, z)] \cdot d\vec{M} = [\vec{y}R(x_0, y, z) - \vec{z}Q(x_0, y, z)] \vec{n} ds,$$

$s$  étant l'arc de  $C$ . On a donc :

$$\int_S \vec{x} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} d\sigma = \int_C \vec{V}_1 \cdot \vec{n} ds$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\vec{x} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}_M \vec{V} + \frac{1}{S} \int_S \vec{x} \cdot [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} - \overrightarrow{\text{rot}}_M \vec{V}] d\sigma = \frac{1}{S} \int_C \vec{V} \cdot \vec{u} ds.$$

L'expression :

$$\frac{1}{S} \int_S \vec{x} \cdot [\vec{\text{rot}} \vec{V} - \vec{\text{rot}}_M \vec{V}] d\sigma$$

tend vers zéro quand le rayon du cercle C tend vers zéro; en effet, elle est plus petite que :

$$\frac{1}{S} \max_{\text{sur } C} |X - X_M| \int_S d\sigma = \max_{\text{sur } C} |X - X_M|$$

en désignant par X, Y, Z les composantes de  $\vec{\text{rot}} \vec{V}$ . On a donc finalement :

$$X = \vec{x} \cdot \vec{\text{rot}}_M \vec{V} = \text{div}_M \vec{V}_1$$

$$Y = \vec{y} \cdot \vec{\text{rot}}_M \vec{V} = \text{div}_M \vec{V}_2$$

$$Z = \vec{z} \cdot \vec{\text{rot}}_M \vec{V} = \text{div}_M \vec{V}_3$$

Nous écrirons encore ces équations :

$$X = \text{div}_{(x)} \vec{V}$$

$$Y = \text{div}_{(y)} \vec{V}$$

$$Z = \text{div}_{(z)} \vec{V}$$

les symboles figurant dans les seconds membres ont une signification évidente d'après ce que nous avons dit plus haut. On a d'ailleurs :

$$\begin{aligned} \text{div}_{(x)} \vec{V} &= \text{div} (\vec{V} \wedge \vec{x}) \\ \text{div}_{(y)} \vec{V} &= \text{div} (\vec{V} \wedge \vec{y}) \\ \text{div}_{(z)} \vec{V} &= \text{div} (\vec{V} \wedge \vec{z}) \end{aligned} \quad (14)$$

car, d'après la relation :

$$\text{div} (\vec{V} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{V} \quad (8)'$$

dont nous sommes partis pour définir le rotationnel, on a bien :

$$X = \text{div} (\vec{V} \wedge \vec{x}) ; \quad Y = \text{div} (\vec{V} \wedge \vec{y}) ; \quad Z = \text{div} (\vec{V} \wedge \vec{z}) .$$

Remarquons en passant que l'existence de ces trois dernières divergences entraîne celle du rotationnel, en vertu de l'identité (8'). Nous allons de même établir la proposition suivante:

*Si un champ vectoriel  $\vec{V}$  admet trois divergences partielles il admet aussi un rotationnel dont les composantes sont:*

$$X = \operatorname{div}_{(x)} \vec{V} ; \quad Y = \operatorname{div}_{(y)} \vec{V} ; \quad Z = \operatorname{div}_{(z)} \vec{V} .$$

D'après la remarque précédente il suffit d'établir que

$$\operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{x}) , \quad \operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{y}) , \quad \operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{z})$$

existent et satisfont aux équations (14). Calculons donc  $\operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{x})$ . On a:

$$\vec{V} \wedge \vec{x} = \vec{y} R(x, y, z) - \vec{z} Q(x, y, z)$$

il faut calculer l'intégrale:

$$I = \int_{\Sigma} (\vec{y} R - \vec{z} Q) \cdot \vec{v} d\sigma$$

étendu à la sphère  $\Sigma$  de centre M qui sera pris pour origine des axes de coordonnées, et de rayon  $\rho$ . Or:

$$\vec{v} = \lambda \vec{n} + \mu \vec{x}$$

en désignant par  $\vec{n}$  la normale extérieure au cercle  $C_x$  intersection de la sphère  $\Sigma$  avec un plan d'abscisse  $x$ , perpendiculaire à  $Mx$ . On a:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \lambda = \frac{\sqrt{\rho^2 - x^2}}{\rho}$$

et:

$$I = \int_{\Sigma} \frac{\sqrt{\rho^2 - x^2}}{\rho} (\vec{y} R - \vec{z} Q) \cdot \vec{n} d\sigma .$$

Or, en désignant par  $ds$  un élément de longueur du cercle  $C_x$ , nous pourrons écrire:

$$d\sigma = \frac{\rho dx ds}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

et nous avons l'identité suivante, facile à établir :

$$I = \int_{-\rho}^{+\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - x^2}}{\rho} \cdot \frac{\rho dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \int_{C_x} \vec{V}_1 \cdot \vec{n} ds .$$

Or :

$$\int_{C_x} \vec{V}_1 \cdot \vec{n} ds = \int_{S_x} \operatorname{div}_x \vec{V} dy dz$$

$S_x$  désignant l'aire du cercle  $C_x$ . Il vient donc :

$$I = \int_{-\rho}^{+\rho} dx \int_{S_x} \operatorname{div}_x \vec{V} dy dz .$$

Passons aux coordonnées polaires, en posant :

$$y = r \cos \theta ; \quad z = r \sin \theta$$

$$(0 \leq r \leq \sqrt{\rho^2 - x^2}) ; \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$\operatorname{div}_x \vec{V} = \varphi(x, y, z) .$$

Il vient alors :

$$I = \int_{-\rho}^{+\rho} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \varphi(x, r \cos \theta, r \sin \theta) r dr .$$

On a d'ailleurs par la formule de la moyenne :

$$\int_0^{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \varphi(x, r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \varphi(x, r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta) \int_0^{\sqrt{\rho^2 - x^2}} r dr$$

$r_0$  étant une certaine valeur de  $r$  comprise entre 0 et  $\sqrt{\rho^2 - x^2}$ .  
Finalement on voit que l'on peut écrire :

$$I = \varphi(x_0, r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0) \int_{-\rho}^{+\rho} \pi(\rho^2 - x^2) dx$$

ou :

$$I = \frac{4}{3} \pi \rho^3 \varphi(x_0, r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$$

avec :

$$|x_0| \leq \rho \quad r_0 < \rho .$$

Donc le rapport de I au volume de la sphère  $\Sigma$  qui est égal à :

$$\varphi(x_0, r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$$

tend bien vers une limite égale à

$$\varphi(0, 0, 0)$$

d'après la continuité de  $\varphi$ . Or, cette limite n'est autre que la valeur de

$$\operatorname{div}(\vec{V} \wedge \vec{x})$$

au point M, et le théorème se trouve ainsi établi.

*Application.* — Soit l'expression :

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz ;$$

pour qu'elle représente la différentielle totale d'une fonction  $F(x, y, z)$  il faut et il suffit que le vecteur  $\vec{V}$  de composantes P, Q, R ait un rotationnel identiquement nul.

En effet, pour que  $\omega$  soit une différentielle totale, il faut et il suffit que son intégrale le long de tout contour fermé soit nulle. Alors cela aura lieu en particulier le long de tout cercle  $\Gamma$  de centre  $M(x, y_0, z_0)$  contenu dans le plan

$$x = x_0 .$$

Donc  $\operatorname{div}_{(x)} \vec{V}$  existe et est nulle<sup>1</sup> ; il en est de même pour  $\operatorname{div}_{(y)} \vec{V}$ ,  $\operatorname{div}_{(z)} \vec{V}$ , et d'après ce que nous avons vu le vecteur  $\vec{V}$  admet un rotationnel de composantes  $\operatorname{div}_{(x)} \vec{V}$ ,  $\operatorname{div}_{(y)} \vec{V}$ ,  $\operatorname{div}_{(z)} \vec{V}$ , identiquement nul.

Inversement si le rotationnel est nul, la Formule de Stokes montre que

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int \omega$$

est nulle le long de tout contour fermé sans points anguleux ; cette dernière restriction pouvant être levée quand C ne présente

<sup>1</sup> On a en effet le long de  $\Gamma$  ;

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_{\Gamma} \vec{V}_1 \cdot \vec{n} ds$$

$\vec{n}$  étant le vecteur unité de la normale à  $\Gamma$ ,  $\vec{V}_1$  le vecteur :  $\vec{y} R(x_0, y, z) - \vec{z} Q(x_0, y, z)$ , déjà rencontré.

qu'un nombre fini de points anguleux grâce à l'artifice qui consiste à arrondir ces singularités; et cela suffit pour que  $\omega$  soit la différentielle d'une fonction  $dF$ .

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$P dx + Q dy + R dz = \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

soit une différentielle totale est que l'on ait:

$$\operatorname{div}_{(x)} \vec{V} = 0, \quad \operatorname{div}_{(y)} \vec{V} = 0; \quad \operatorname{div}_{(z)} \vec{V} = 0.$$

### 12. Conséquences du théorème flux-divergence généralisé.

Pour terminer nous allons enfin indiquer quelques conséquences intéressantes que l'on peut tirer de la généralisation donnée par M. Bouligand du théorème flux-divergence. Plaçons-nous dans le cas du plan et soit  $Oxy$  un système d'axes orthogonal et normal. Donnons-nous une fonction  $f(x)$  et considérons le vecteur:

$$\vec{x} f(x)$$

supposons qu'il admette une divergence circulaire centrée continue: Je dis alors que  $f(x)$  admet une dérivée continue et que l'on a:

$$f'(x) = \operatorname{div} \vec{x} f(x).$$

Soit en effet  $C$  le contour rectangulaire limité par les droites  $Ox$ ,  $x = x_0$ ,  $y = a$ ,  $Oy$ . Nous avons  $S$ , étant le domaine de ce rectangle:

$$\int_S \operatorname{div} \vec{x} f(x) = \int_C f(x) \vec{x} \cdot \vec{\nu} ds.$$

Le long de  $Ox$  et du côté opposé à  $Ox$ , on a:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = 0$$

le long de la parallèle à  $Oy$  d'abscisse  $x_0$ :

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = \vec{x} \cdot \vec{x} = 1$$

et le long de  $Oy$ :

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = -\vec{x} \cdot \vec{x} = -1.$$