

9. Définition du rotationnel.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Par suite, pour tout contour fermé à tangente continue sans point double C parcouru dans le sens direct :

$$\int_C P dx + Q dy = \int_S \operatorname{div} \vec{V} \cdot d\sigma \quad (7)$$

on en tire le théorème suivant, généralisation du théorème classique sur l'intégrale des différentielles exactes :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale curviligne

$$\int_C P dx + Q dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé sans point double est que la divergence circulaire centrée du vecteur : $\vec{x}Q - \vec{y}P$ soit identiquement nulle dans la région du plan envisagée¹.

D'après (7) cette condition est suffisante; elle est aussi nécessaire puisque le long de tout cercle de centre M l'intégrale

$$\int_C (\vec{x}Q - \vec{y}P) \cdot \vec{v} ds$$

étant nulle par hypothèse, il en sera de même de son quotient par $\pi\rho^2$ quel que soit ρ ; d'où existence en chaque point d'une divergence circulaire centrée nulle.

[9. Définition du rotationnel.

Pour définir le rotationnel, nous poserons :

$$\operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} \quad (8)$$

où \vec{u} désigne un vecteur unitaire de direction quelconque, mais fixe². On voit immédiatement que si les composantes de \vec{V} ont des dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z , le rotationnel ainsi défini coïncide bien avec le rotationnel classique. Dans le

¹ L'énoncé suppose la continuité de la tangente. On pourrait d'ailleurs aisément, à la faveur d'un théorème de M. Lebesgue, étendre le résultat aux courbes rectifiables.

² Pareillement, on pourrait unifier la définition du gradient et de la divergence et aboutir à la notion de gradient sphérique centré en utilisant l'identité

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi \cdot \vec{u} = \operatorname{div} (\varphi \vec{u}).$$

cas contraire pour justifier la définition fournie par l'équation (8) il faut :

1° Que $\vec{V} \wedge \vec{u}$ ait une divergence (au sens généralisé défini plus haut).

2° Que (8) définisse alors bien un vecteur et un seul. Examinons le premier point : la condition énoncée sera remplie si l'intégrale :

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3 S} \int (\vec{V} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{\nu} d\sigma \quad (9)$$

prise sur la sphère S de centre M et de rayon ρ admet une limite, quand ρ tend vers zéro, continue avec M, et reste inférieure quel que soit ρ à un nombre fixe Λ . Or, on peut écrire (9), en désignant par ϖ le volume de S :

$$\frac{\vec{u}}{\varpi} \int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V}) d\sigma \quad (10)$$

Alors 1° sera satisfaite si la longueur du vecteur $\vec{W}(\rho, M)$

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3 S} \int (\vec{\nu} \wedge \vec{V}) d\sigma$$

reste inférieure à Λ quel que soit ρ et M, et si \vec{W} tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro. On aura alors d'après (8), (9) et (10) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\varpi} \int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V}) d\sigma ; \quad (11)$$

cette relation (11) définit alors complètement le rotationnel et la condition 2° est bien remplie.

10. Formule de Stokes.

Nous allons montrer que l'existence et la continuité du rotationnel généralisé que nous venons de définir dans le paragraphe précédent suffisent pour assurer l'exactitude de la formule de Stokes :

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_{\Sigma} \vec{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\nu} d\sigma \quad (12)$$

Σ étant une portion de surface admettant un champ de normales