1. — Introduction.

LA SECONDE PÉRIODE DU JEU DE CLOCHE ET MARTEAU

PAR

Edward S. Allen (Iowa State College, U.S.A.).

1. — *Introduction.*

M. Jéquier a récemment examiné l'application du Calcul des Probabilités à l'étude de la première période du jeu de Cloche et Marteau [1]. Comme suite à son intéressant mémoire, nous nous proposons de présenter dans cette Note l'étude de la seconde période du jeu.

Rappelons d'abord, avec M. Jéquier, les règles de jeu qui s'appliquent à la seconde période, c'est-à-dire à la période qui commence avec l'ouverture de l'Auberge.

« 3. A part les jetons, le matériel du jeu comprend:

« *a*) 8 dés à jouer. Chaque dé a 5 de ses faces non marquées, ou si l'on veut, marquées 0. La 6^{me} face du premier dé est marquée 1, la 6^{me} face du 2^{me} dé 2, etc., jusqu'au 6^{me} dé, dont la 6^{me} face est marquée 6. Le 7^{me} dé porte sur une de ses faces le dessin d'une Cloche (symbole Cl), le 8^{me} dé a une de ses faces marquée d'un Marteau (M).

« *b*) 5 cartes, à savoir: la *Cloche* (Cl), le *Marteau* (M), la *Cloche et le Marteau* (CM), le *Cheval* (Ch) et *l'Auberge* (Au).

« 4. Au début de la partie les cartes sont misées par l'un des joueurs...

« 11. L'Auberge ne peut rapporter à son propriétaire qu'à la fin de la partie et voici comment: l'encaisse commune baisse continuellement, puisque les mises terminées, la Caisse n'opère que des versements sans jamais rien toucher. Arrive donc un coup où la somme restant en caisse est trop faible pour payer le

[1] *L'Enseignement mathématique*, XXII^e année, n° 6, p. 347. — [Voir la lettre de M. Jéquier insérée p. 325 de ce fascicule, sous la rubrique « Mélanges et Correspondance ». *N. d. l. Réd.*]

montant indiqué par les dés: on dit alors que l'Au est « ouverte ». Supposons qu'il reste r en caisse, les dés indiquant $s>r$. Le joueur ayant lancé les dés paiera à l'Au la différence $s-r>0$. La somme r restera en caisse. Chacun des joueurs suivants qui amènera une somme $s>r$ paiera la différence respective $s-r$ à l'Au, jusqu'à ce qu'un joueur amène $s\leq r$, somme qu'il recevra de la caisse. Dans le cas de l'inégalité le jeu continue; dans celui de l'égalité, il est terminé puisque la Caisse doit précisément la somme qui lui restait. On dit alors que la Caisse « saute ».

« 12. Si un joueur amène $s>r$, avec une figure, c'est le propriétaire de la carte correspondante qui doit payer la différence $s-r$ à l'Au.

« 13. A partir du moment où l'Au est ouverte, et chaque fois que l'un des joueurs amène 0, sans figure, le propriétaire du Ch doit payer 1 à l'Au.

« 14. Si un joueur amène 0, avec une figure, c'est le propriétaire de la carte correspondante qui paie 1 à l'Au.

« 15. Le gagnant est celui des joueurs qui, la partie terminée, a le plus grand nombre de jetons. »

Il faut ajouter une 16me règle que M. Jéquier a bien voulu me communiquer.

16. Si le propriétaire de l'Auberge amène $s>r$, le Ch paiera la différence $s-r$ à l'Au.

Sous l'hypothèse que la caisse saute sans que l'Au ait rien apporté à son propriétaire, M. Jéquier a trouvé les résultats suivants pour les gains probables d'un joueur seul, et de chaque carte (à l'exception, naturellement, de l'Auberge) [1].

$$\left\{\begin{aligned} G_S &= 0{,}56155\,\frac{C}{n} \\ G_{Cl} &= G_M = 0{,}12560\ C \\ G_{CM} &= 0{,}02512\ C \\ G_{Ch} &= 0{,}16213\ C \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

[1] J'ai corrigé un peu les formules de M. Jéquier. En effet, $4\nu_4 = 15000$, au lieu de 14000; d'où nous trouvons

$$\sum_{\mu=0}^{21} (\nu_\mu \cdot \mu) = 163296 \quad \text{(p. 351)},$$

$a = 3{,}5000$ (comme on attendrait du fait que les 6 dés ont 21 points)
$b = 3{,}1651$ (p. 352).

Mais, si nous supposons que μ reste dans la caisse au moment que l'Auberge s'ouvre, il faudra remplacer C (le montant en caisse avant le premier lancement des dés) dans ces formules par $C-\mu$, et puis calculer les paiements probables de la seconde période.

2. — *Espérance mathématique de l'Auberge.*

Soit, en premier lieu, s_μ le gain probable de l'Auberge par le coup qui ouvre l'Auberge. Ce coup peut être n'importe lequel des nombres $\mu+1$, $\mu+2$, . . . , 21, et les gains correspondants seront 1, 2, ... , $21-\mu$ respectivement.

Or M. Jéquier a calculé 22 nombres, ν_0, ν_1, ν_2. . . , ν_{21}, qui sont les nombres de possibilités d'amener 0, 1, 2, ..., 21 points respectivement. Le gain probable de l'Auberge de ce premier coup est donc

$$S_\mu = \frac{\sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho}{\sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}. \qquad (2)$$

Dans chaque coup après celui qui ouvre l'Auberge, et avant le prochain qui diminue le nombre de jetons dans la caisse, le versement peut être 0, $\mu+1$, $\mu+2$, ..., 21, et, vu qu'un versement de 0 apporte 1 à l'Auberge, les gains correspondants seront 1, 1, 2, . . . , $21-\mu$. Le gain moyen par coup sera alors

$$\frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho}{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}.$$

La probabilité d'amener un nombre qui abaissera la caisse — tels nombres sont 1, 2, 3, . . . , μ — est

$$\frac{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}{\sum_{\rho=0}^{21} \nu_\rho}$$