LA SECONDE PÉRIODE DU JEU DE CLOCHE ET MARTEAU

Autor(en): **Allen, Edward S.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21884

LA SECONDE PÉRIODE DU JEU DE CLOCHE ET MARTEAU

PAR

Edward S. Allen (Iowa State College, U.S.A.).

1. — *Introduction.*

M. Jéquier a récemment examiné l'application du Calcul des Probabilités à l'étude de la première période du jeu de Cloche et Marteau [1]. Comme suite à son intéressant mémoire, nous nous proposons de présenter dans cette Note l'étude de la seconde période du jeu.

Rappelons d'abord, avec M. Jéquier, les règles de jeu qui s'appliquent à la seconde période, c'est-à-dire à la période qui commence avec l'ouverture de l'Auberge.

« 3. A part les jetons, le matériel du jeu comprend:

« *a*) 8 dés à jouer. Chaque dé a 5 de ses faces non marquées, ou si l'on veut, marquées 0. La 6^{me} face du premier dé est marquée 1, la 6^{me} face du 2^{me} dé 2, etc., jusqu'au 6^{me} dé, dont la 6^{me} face est marquée 6. Le 7^{me} dé porte sur une de ses faces le dessin d'une Cloche (symbole Cl), le 8^{me} dé a une de ses faces marquée d'un Marteau (M).

« *b*) 5 cartes, à savoir: la *Cloche* (Cl), le *Marteau* (M), la *Cloche et le Marteau* (CM), le *Cheval* (Ch) et *l'Auberge* (Au).

« 4. Au début de la partie les cartes sont misées par l'un des joueurs...

« 11. L'Auberge ne peut rapporter à son propriétaire qu'à la fin de la partie et voici comment: l'encaisse commune baisse continuellement, puisque les mises terminées, la Caisse n'opère que des versements sans jamais rien toucher. Arrive donc un coup où la somme restant en caisse est trop faible pour payer le

[1] *L'Enseignement mathématique*, XXII^e année, n° 6, p. 347. — [Voir la lettre de M. Jéquier insérée p. 325 de ce fascicule, sous la rubrique « Mélanges et Correspondance ». *N. d. l. Réd.*]

montant indiqué par les dés: on dit alors que l'Au est « ouverte ». Supposons qu'il reste r en caisse, les dés indiquant $s > r$. Le joueur ayant lancé les dés paiera à l'Au la différence $s - r > 0$. La somme r restera en caisse. Chacun des joueurs suivants qui amènera une somme $s > r$ paiera la différence respective $s - r$ à l'Au, jusqu'à ce qu'un joueur amène $s \leq r$, somme qu'il recevra de la caisse. Dans le cas de l'inégalité le jeu continue; dans celui de l'égalité, il est terminé puisque la Caisse doit précisément la somme qui lui restait. On dit alors que la Caisse « saute ».

« 12. Si un joueur amène $s > r$, avec une figure, c'est le propriétaire de la carte correspondante qui doit payer la différence $s - r$ à l'Au.

« 13. A partir du moment où l'Au est ouverte, et chaque fois que l'un des joueurs amène 0, sans figure, le propriétaire du Ch doit payer 1 à l'Au.

« 14. Si un joueur amène 0, avec une figure, c'est le propriétaire de la carte correspondante qui paie 1 à l'Au.

« 15. Le gagnant est celui des joueurs qui, la partie terminée, a le plus grand nombre de jetons. »

Il faut ajouter une 16^{me} règle que M. Jéquier a bien voulu me communiquer.

16. Si le propriétaire de l'Auberge amène $s > r$, le Ch paiera la différence $s - r$ à l'Au.

Sous l'hypothèse que la caisse saute sans que l'Au ait rien apporté à son propriétaire, M. Jéquier a trouvé les résultats suivants pour les gains probables d'un joueur seul, et de chaque carte (à l'exception, naturellement, de l'Auberge) [1].

$$\left\{\begin{aligned} G_S &= 0,56155 \frac{C}{n} \\ G_{Cl} &= G_M = 0,12560\ C \\ G_{CM} &= 0,02512\ C \\ G_{Ch} &= 0,16213\ C \end{aligned}\right. \tag{1}$$

[1] J'ai corrigé un peu les formules de M. Jéquier. En effet, $4\nu_4 = 15000$, au lieu de 14000; d'où nous trouvons

$$\sum_{\mu=0}^{21} (\nu_\mu \cdot \mu) = 163296 \quad \text{(p. 351)},$$

$a = 3,5000$ (comme on attendrait du fait que les 6 dés ont 21 points)
$b = 3,1651$ (p. 352).

Mais, si nous supposons que μ reste dans la caisse au moment que l'Auberge s'ouvre, il faudra remplacer C (le montant en caisse avant le premier lancement des dés) dans ces formules par $C-\mu$, et puis calculer les paiements probables de la seconde période.

2. — *Espérance mathématique de l'Auberge.*

Soit, en premier lieu, s_μ le gain probable de l'Auberge par le coup qui ouvre l'Auberge. Ce coup peut être n'importe lequel des nombres $\mu+1, \mu+2, \ldots, 21$, et les gains correspondants seront $1, 2, \ldots, 21-\mu$ respectivement.

Or M. Jéquier a calculé 22 nombres, $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{21}$, qui sont les nombres de possibilités d'amener 0, 1, 2, ..., 21 points respectivement. Le gain probable de l'Auberge de ce premier coup est donc

$$S_\mu = \frac{\sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho}{\sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}. \tag{2}$$

Dans chaque coup après celui qui ouvre l'Auberge, et avant le prochain qui diminue le nombre de jetons dans la caisse, le versement peut être $0, \mu+1, \mu+2, \ldots, 21$, et, vu qu'un versement de 0 apporte 1 à l'Auberge, les gains correspondants seront $1, 1, 2, \ldots, 21-\mu$. Le gain moyen par coup sera alors

$$\frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho}{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}.$$

La probabilité d'amener un nombre qui abaissera la caisse — tels nombres sont $1, 2, 3, \ldots, \mu$ — est

$$\frac{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}{\sum_{\rho=0}^{21} \nu_\rho}$$

Par conséquent, le nombre moyen des coups après celui qui ouvre l'Auberge et avant l'abaissement prochain de la caisse sera

$$\frac{\sum_{\rho=0}^{21} \nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho} - 1 = \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}.$$

Si nous désignons par q'_μ le gain probable pour ce temps-là, nous trouvons

$$q'_\mu = \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho} \cdot \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho}{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho} = \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}. \tag{3}$$

Le raisonnement par lequel nous calculerons q'_μ, l'espérance mathématique totale du gain de l'Auberge (à part celui qui est attendu en vertu de la 16me règle), est le suivant:

q'_1 est évidemment le même que q_1, car le seul abaissement possible de la caisse de 1 résulte d'un versement de 1.

Quant à $q_\mu (\mu > 1)$, cette quantité a pour premier terme q'_μ, le gain probable avant la première réduction de la caisse. Or la probabilité pour que cette réduction soit σ est

$$\frac{\nu_\sigma}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho};$$

c'est aussi la probabilité que $\mu - \sigma$ reste dans la caisse, et que l'espérance mathématique de l'Auberge soit $q_{\mu-\sigma}$. Il en résulte que

$$q_\mu = q'_\mu + \frac{\sum_{\sigma=1}^{\mu} \nu_\sigma q_{\mu-\sigma}}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho} = \frac{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\rho + \sum_{\rho=1}^{\mu-1} \nu_\rho q_{\mu-\rho}}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}. \tag{4}$$

La carte Auberge peut donc espérer recevoir des joueurs actifs

$$t_\mu = s_\mu + q_\mu \tag{5}$$

dans le cas qu'elle trouve μ dans la caisse au moment d'être ouverte. Mais ce n'est pas tout. De la règle 16 il suit que le joueur qui tient l'Auberge ne doit rien payer à cette carte (comme les autres le doivent) mais que le Cheval fait ce service pour lui. Il faut donc ajouter à t_μ, $\frac{s_\mu}{n}$ et un autre terme que nous calculerons bientôt.

3. — *Espérances mathématiques des autres cartes et des joueurs dans la seconde période.*

Examinons maintenant la source de ces gains de l'Auberge compris dans t_μ. Comme dans les cas examinés par M. Jéquier, nous trouvons que les cartes Cloche, Marteau, et Cloche-Marteau paieront respectivement $\frac{5}{36}t_\mu$, $\frac{5}{36}t_\mu$, $\frac{1}{36}t_\mu$; car dans $\frac{5}{36}$ des coups on amènera Cloche sans Marteau (ou Marteau sans Cloche) et dans $\frac{1}{36}$ des coups Cloche et Marteau ensemble.

Enfin, il faut partager les $\frac{25}{36}t_\mu$ qui restent entre le Cheval et les joueurs actifs. Ce sont toujours ces derniers qui paient le coup qui ouvre l'Auberge; en effet, ce coup ne peut pas amener 0. $\frac{25}{36}s_\mu$ est payé par les joueurs actifs. Soit $\frac{25}{36}(t_\mu - s_\mu) = \frac{25}{36}q_\mu = y_\mu + z_\mu$, où y_μ est la somme que l'Auberge espère recevoir des joueurs actifs, z_μ celle qu'il espère recevoir du Cheval.

Le calcul de z_μ est fort semblable à celui de q_μ. Avec 1 dans la caisse, nous trouvons

$$z_1 = \frac{\nu_0}{\nu_0 + \sum_{\rho=2}^{21} (\rho - 1)\nu_\rho} \cdot \frac{25}{36} q_1 = \frac{\frac{25}{36}\nu_0}{\nu_1} . \tag{6}$$

En général, avec μ dans la caisse, la partie de $\frac{25}{36}q_\mu$ que le Cheval doit attendre à payer sera

$$z_\mu = \frac{\frac{25}{36}\nu_0 + \sum_{\varrho=1}^{\mu-1} \nu_\varrho z_{\mu-\varrho}}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} \nu_\varrho}. \tag{7}$$

En effet, l'espérance mathématique de cette perte avant la première réduction de la caisse est

$$\frac{25}{36} \frac{\nu_0}{\nu_0 + \sum_{\varrho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu)\nu_\varrho} q'_\mu = \frac{\frac{25}{36}\nu_0}{\sum_{\varrho=1}^{\mu} \nu_\varrho}.$$

En

$$\frac{\nu_\varrho}{\sum_{\sigma=1}^{\mu} \nu_\sigma}$$

des cas, cette réduction prendra ρ de la caisse et y laissera $\mu-\rho$. La formule pour z_μ est dès lors évidente.

De la valeur de z_μ on trouve tout de suite celle de y_μ.

La 16me règle montre que le joueur actif, auquel appartient l'Auberge, reçoit du Cheval chaque somme qu'il paie à la propre carte; ce qui donne à cette carte une valeur de plus de $\frac{s_\mu + y_\mu}{n}$. Sa valeur totale est donc

$$\Gamma_{\mathrm{Au},\mu} = t_\mu + \frac{y_\mu + s_\mu}{n}. \tag{8}$$

Les μ jetons qui restent dans la caisse quand l'Auberge s'ouvre sont encore à distribuer. Il est évident que la Cloche en reçoit (au cas moyen) $\frac{5}{36}\mu$, le Marteau la même quantité, Cloche-Marteau $\frac{1}{36}\mu$, et les joueurs actifs $\frac{25}{36}\mu$.

En résumant, pour le cas que μ jetons restent dans la caisse à l'ouverture de l'Auberge, les espérances mathématiques des joueurs sans cartes, et des cartes, sont les suivantes. Pour un joueur seul

$$\Gamma_{S,\mu} = \frac{0{,}56155\,(C - \mu) + \frac{25}{36}\mu - \frac{25}{36}s_\mu - y_\mu}{n}$$

$$= \frac{0{,}56155\,C + 0{,}13289\,\mu - 0{,}69444\,s_\mu - y_\mu}{n} \,. \tag{9}$$

Pour la Cloche ou le Marteau

$$\Gamma_{Cl,\mu} = \Gamma_{M,\mu} = 0{,}12560\,(C - \mu) + \frac{5}{36}\mu - \frac{5}{36}s_\mu - \frac{5}{36}q_\mu$$

$$= 0{,}12560\,C + 0{,}01329\,\mu - 0{,}13889\,t_\mu \,. \tag{10}$$

Pour la Cloche-et-Marteau

$$\Gamma_{CM,\mu} = 0{,}02512\,C + 0{,}00266\,\mu - 0{,}02778\,t_\mu \,. \tag{11}$$

Pour le Cheval

$$\Gamma_{Ch,\mu} = 0{,}16213\,(C - \mu) - \frac{s_\mu}{n} - \frac{y_\mu}{n} - z_\mu \,. \tag{12}$$

Pour l'Auberge

$$\Gamma_{Au,\mu} = t_\mu + \frac{S_\mu}{n} + \frac{y_\mu}{n} \,. \tag{13}$$

4. — *Probabilité d'ouvrir l'Auberge avec μ dans la Caisse.*

Il y a ν_σ possibilités d'amener σ par un seul coup. Combien de possibilités y a-t-il que le premier coup qui cause que le total jusque là amené soit au moins C, compte σ ? Vu que le coup même peut arriver quand la caisse possède 1, 2, . . . , σ, le nombre de ces possibilités devra être $\sigma\nu_\sigma$.

La probabilité, donc, que ce soit un versement de σ qui ouvre l'Auberge (et éventuellement fait que la caisse saute) est

$$\lambda_\sigma = \frac{\sigma\nu_\sigma}{\sum\limits_{\rho=1}^{21} \rho\nu_\rho} \,. \tag{14}$$

Il est également probable que ce versement de σ laisse 0, 1, 2, . . , ou $\sigma - 1$ dans la caisse. Autrement dit, la probabilité d'ouvrir l'Auberge avec un coup de σ et de laisser $\mu(<\sigma)$ dans la caisse est

$$\frac{\lambda_\sigma}{\sigma} = \frac{\nu_\sigma}{\sum_{\rho=1}^{21} \rho\nu_\rho}.$$

La probabilité totale d'ouvrir l'Auberge avec μ dans la caisse est donc

$$\pi_\mu = \sum_{\sigma=\mu+1}^{21} \frac{\nu_\sigma}{\sum_{\rho=1}^{21} \rho\nu_\rho} = \frac{\sum_{\rho=\mu+1}^{21} \nu_\rho}{\sum_{\rho=1}^{21} \rho\nu_\rho}. \tag{15}$$

5. — *Espérances mathématiques totales des joueurs et des cartes.*

Nous trouvons maintenant les espérances mathématiques des joueurs et des cartes, en multipliant les membres des équations (9) à (13) par π_μ, et en les sommant de $\mu = 0$ à $\mu = 20$.

Les résultats sont les suivants.

$$\begin{aligned} \Gamma_S &= \frac{0{,}56155\,C + 0{,}13289\,\Sigma\mu\pi_\mu - 0{,}69444\,\Sigma s_\mu\pi_\mu - \Sigma y_\mu\pi_\mu}{n} \\ &= \frac{0{,}56155\,C + 0{,}4061 - 2{,}1219 - 19{,}7374}{n} \\ &= \frac{0{,}56155\,C - 21{,}4532}{n} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\Gamma_{Cl} = \Gamma_M = 0{,}12560\,C + 0{,}01329\,\Sigma\mu\pi_\mu - 0{,}13889\,\Sigma t_\mu\pi_\mu \tag{17}$$

$$\Gamma_{CM} = \frac{1}{5}\Gamma_M = 0{,}02512\,C - 0{,}97827 \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{Ch} &= 0{,}16213\,C - 0{,}16213\,\Sigma\mu\pi_\mu - \frac{\Sigma s_\mu\pi_\mu}{n} - \frac{\Sigma y_\mu\pi_\mu}{n} - \Sigma z_\mu\pi_\mu \\ &= 0{,}16213\,C - 0{,}49539 - \frac{3{,}0555}{n} - \frac{19{,}7374}{n} - 2{,}73138 \\ &= 0{,}16213\,C - 3{,}22677 - \frac{22{,}7929}{n} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{Au} &= \Sigma t_\mu\pi_\mu + \frac{\Sigma s_\mu\pi_\mu}{n} + \frac{\Sigma y_\mu\pi_\mu}{n} \\ &= 35{,}50976 + \frac{3{,}0555}{n} + \frac{19{,}7374}{n} \\ &= 35{,}50976 + \frac{22{,}7929}{n}. \end{aligned} \tag{20}$$

6. — *Remarques.*

1. A part l'Auberge, les espérances mathématiques des joueurs seuls et des cartes sont à peu près les valeurs données par M. Jéquier, si C est suffisamment grand.

2. Les espérances des cartes Cl, M, CM sont indépendantes du nombre des joueurs. D'autre part, la valeur du Cheval est augmentée, celle de l'Auberge diminuée avec l'accroissement de ce nombre.

3. L'espérance mathématique de l'Auberge est indépendante de C; elle est la seule carte dont la valeur probable est connue avant la clôture des mises.

4. Vu la dépendance de la valeur de l'Auberge de μ, un nombre inconnu d'avance, un écart considérable de cette valeur de celle donnée par (20) est à attendre, s'il ne s'agit pas d'un grand nombre de parties.

7. — *Valeurs des constantes, si l'Auberge s'ouvre quand μ reste dans la caisse.*

Les constantes, dont les valeurs calculées se trouvent ci-dessous, correspondent au cas que l'Auberge s'ouvre avec μ dans la caisse.

ν_μ = nombre de possibilités d'amener μ points
s_μ = gain moyen de l'Auberge du coup qui l'ouvre
q'_μ = gain moyen de l'Auberge de ce coup jusqu'au prochain abaissement de la caisse
q_μ = gain moyen de l'Auberge de ce même coup jusqu'à la fin de la partie
t_μ = $s_\mu + q_\mu$

Les cartes Cl, M, CM, paient $\frac{11}{36} q_\mu$.

y_μ = la partie du reste, $\frac{25}{36} q_\mu$, que paient les joueurs actifs
z_μ = la partie du reste que paie le Cheval
π_μ = probabilité d'ouvrir l'Auberge avec μ dans la caisse.

μ	ν_μ	s_μ	q_μ	t_μ	y_μ	z_μ	π_μ
0	15625			0,0000			0,190029
1	3125	4,7397	47,3248	52,0645	29,3922	3,4722	0,170893
2	3125	4,2112	42,8599	47,0711	26,2916	3,4722	0,151755
3	3705	3,7838	37,7030	41,4868	22,9304	3,2522	0,128791
4	4375	3,3879	36,6108	39,9987	22,1590	3,2651	0,105826
5	4375	3,1974	34,6111	37,8085	20,8758	3,1597	0,079022
6	4500	3,3738	34,2856	37,6594	20,6560	3,1534	0,051477
7	2000	3,1149	37,7677	40,8826	22,7415	3,4861	0,039229
8	1500	2,7615	37,2781	40,0396	22,3467	3,5408	0,030044
9	1625	2,6340	36,1690	38,8030	21,6013	3,5160	0,020092
10	1025	2,3763	36,6106	38,9869	21,8211	3,6029	0,013819
11	1025	2,5223	36,2840	38,8063	21,5703	3,6268	0,007538
12	425	2,3251	36,9914	39,3165	21,9505	3,7378	0,004936
13	300	2,1107	37,1597	39,2704	21,9900	3,8153	0,003099
14	200	1,8366	37,0723	38,9089	21,8742	3,8704	0,001874
15	180	2,0317	37,0115	39,0432	21,7804	3,9220	0,000772
16	55	1,8310	37,2424	39,0734	21,8652	3,9976	0,000435
17	30	1,4390	37,4267	38,8657	21,9276	4,0632	0,000251
18	30	1,6364	37,4550	39,0914	21,8776	4,1328	0,000067
19	5	1,1667	37,5603	38,7270	21,8837	4,1999	0,000037
20	5	1,0000	37,6641	38,6641	21,8929	4,2627	0,000006
21	1						

2 décembre 1924.