

# Examen de cas spéciaux.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

part, de l'homographie, il sera pris égal à l'unité; les formules de correspondance sont:

$$A = -b, \quad B = \frac{a}{2}, \quad s = d, \quad e = 1.$$

La parabole (Q) dépend de trois paramètres; son équation tangentielle est:

$$BU^2 - AUV + sUW + VW = 0. \quad (Q)$$

L'équation ponctuelle s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation de la corde  $tt'$ , le produit P par son expression homographique en S et en égalant à zéro le discriminant du polynôme en S, du second degré, ainsi obtenu:

$$(x + sy + A)^2 = 4y(sx - B), \quad (Q)$$

ou encore

$$(x - sy + A)^2 + 4(As + B)y = 0;$$

cette parabole (Q) touche Ox au point  $x = A$ ; l'autre tangente issue de O a pour équation  $Ax + By = 0$ : c'est une arithmocorde particulière de (P), qui représente la solution  $S = -\frac{B}{A}$ ,  $P = 0$ .

La directrice a pour équation  $y + sx = B$ ; les coordonnées du foyer sont:

$$x = \frac{Bs - A}{1 + s^2}, \quad y = -\frac{As + B}{1 + s^2}.$$

#### EXAMEN DE CAS SPÉCIAUX.

16. — *Cas où l'équation  $D = 0$  a une seconde racine rationnelle.* — Soit  $S = 2a$ , la racine rationnelle (autre que  $S = s$ ). Alors:

$$S^2 - sS^2 - 4AS - 4B \equiv (S - 2a)(S^2 - 2LS + 2M);$$

$a$ , L et M sont supposés donnés; soit  $\delta = L^2 - 2M$  la quantité dont dépend la réalité des racines du facteur quadratique.

Les formules sont les suivantes. L'équation cubique  $p'u = 0$  a une racine rationnelle  $e_1$ .

$$s = 2(a + L) , \quad A = -\left(aL + \frac{M}{2}\right) , \quad B = aM ;$$

$$e_1 = p\omega_1 = -\frac{2}{3}\left(a^2 + \frac{M - L^2}{2}\right) ,$$

$$g_2 = 3e_1^2 + \delta L^2 . \quad g_3 = e_1(e_1^2 - \delta L^2) , \quad \Delta = \delta L^2(9e_1^2 - \delta L^2)^2 .$$

$$p^\nu = \frac{1}{3}(a^2 + L^2 - M) , \quad p'^\nu = -aM , \quad p''^\nu = 2a^2(L^2 - M) + \frac{M^2}{2} ,$$

$$p^{\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{3}\left(a^2 + 3aL + L^2 + \frac{M}{2}\right) , \quad p'^{\frac{\nu}{2}} = -2L\left(a^2 + aL + \frac{M}{2}\right) ,$$

$$p''^{\frac{\nu}{2}} = -s \cdot p'^{\frac{\nu}{2}} ;$$

$$p^\alpha = \frac{1}{3}\left(a^2 - 3aL + L^2 + \frac{M}{2}\right) , \quad p'^\alpha = -2L\left(a^2 - aL + \frac{M}{2}\right) ,$$

$$p''^\alpha = -s \cdot p'^\alpha .$$

$\alpha$  est l'argument associé à  $S = 2a$ ; sa valeur est  $\alpha = \omega_1 - \frac{\nu}{2}$ .

17. — *Cas où toutes les racines de l'équation  $D = 0$  sont rationnelles.* Soient  $2a, 2b, 2c$  les racines de l'équation en  $S$ :

$$S^3 - sS^2 - 4AS - 4B ;$$

les expressions de  $A, B, s$  sont alors:

$$s = 2(a + b + c) ,$$

$$A = -(ab + bc + ca) , \quad B = 2abc .$$

D'où, pour les éléments elliptiques les expressions:

$$g_2 = \frac{4}{3}(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) > 0 ,$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(a^2 + b^2 - 2c^2)(b^2 + c^2 - 2a^2)(c^2 + a^2 - 2b^2) ,$$

$$\Delta = 16(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2 > 0 .$$

Les trois racines de  $p'u = 0$  sont réelles et rationnelles :

$$e_1 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2), \quad e_2 = \frac{1}{3}(c^2 + a^2 - 2b^2),$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2c^2);$$

dans l'ordre  $e_1 > e_2 > e_3$ , pour  $a^2 < b^2 < c^2$ .

$$p^\nu = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \quad p'^\nu = -2abc, \quad p''^\nu = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2);$$

$$p^{\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca, \quad p'^{\frac{\nu}{2}} = -2(a+b)(b+c)(c+a).$$

Si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les valeurs des arguments associés à  $S = 2a, 2b$  et  $2c$ , les formules générales de correspondance donnent :

$$p^\alpha = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + bc - a(b+c), \quad p'^\alpha = -2(b+c)(a-b)(a-c),$$

etc.

Et, par suite :

$$\alpha = \omega_1 - \frac{\nu}{2}, \quad \beta = \omega_2 - \frac{\nu}{2}, \quad \gamma = \omega_3 - \frac{\nu}{2},$$

$$e_1 = p^{\omega_1}, \quad e_2 = p^{\omega_2}, \quad e_3 = p^{\omega_3}.$$

Pour  $u = \omega_1$ , il vient :

$$S = a + b + c - \frac{bc}{a}, \quad P = ab + ac - bc, \quad \pm \sqrt{D} = \frac{(a-b)(a-c)}{a},$$

$$X' = a, \quad X'' = b + c - \frac{bc}{a}.$$

18. — *Interprétations géométriques.* — Les formules ci-dessus assurent l'existence de trois tangentes rationnelles, communes aux paraboles (P) et (Q) du paragraphe 15 :

$$U = 1, \quad V = -2a, \quad W = a^2, \quad \text{etc. ...}$$

Cette question peut encore être traitée en rapportant les deux paraboles au triangle de référence formé par les trois tangentes communes. Sans restriction de généralité, la parabole (P) peut être représentée par les équations tangentielle et ponctuelle :

$$\frac{1}{U} + \frac{1}{V} + \frac{1}{W} = 0, \quad \pm \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 0.$$

Si  $t$  est le paramètre du point courant et de la tangente associée, on pourra prendre la représentation paramétrique suivante en coordonnées homogènes :

$$U = \frac{1}{1 + \sigma + t}, \quad V = \frac{1}{1 - \sigma - t}, \quad W = -\frac{1}{2};$$

$$x = \frac{1}{U^2} = (t + \sigma + 1)^2, \quad y = \frac{1}{V^2} = (t + \sigma - 1)^2, \quad z = \frac{1}{W^2} = 4;$$

les coordonnées tangentielles de la corde  $tt'$  sont alors :

$$U = 2 - (S + 2\sigma), \quad V = 2 + (S + 2\sigma), \\ W = P + \sigma S + \sigma^2 - 1;$$

où  $S = t + t'$ ,  $P = tt'$ . Si maintenant la conique (Q) est représentée par l'équation

$$\frac{L}{U} + \frac{M}{V} = \frac{1}{W},$$

les constantes  $\sigma$ , L et M étant liées par la relation

$$\sigma(M - L) = 1,$$

l'homographie définie entre P et S par les tangentes de (Q) a pour coefficients :

$$A = 1 + \sigma^2 + 2\sigma^2(L + M), \\ B = 2\sigma(\sigma^2 - 1)(L + M + 1), \\ s = 2\sigma(L + M - 1).$$

Les formules d'équivalence entre les deux modes de représentation sont :

$$a = 1 - \sigma, \\ b = -1 - \sigma, \\ c = \sigma(L + M + 1),$$

le paramètre d'homogénéité étant choisi de telle manière que  $a - b = 2$ .

19. — *Cas de la cubique équi-anharmonique.* — En prenant A et s arbitraires,  $s \neq 0$ , la formule

$$24(Bs - 2A^2) + (s^2 + 8A)^2 = 0,$$

permet de donner à B une valeur rationnelle assurant l'existence d'un cas équi-harmonique ( $g_2 = 0$ ). Ces formules peuvent être écrites sous la forme suivante, avec un paramètre rationnel  $t$ :

$$A = \frac{12t - s^2}{8}, \quad B = \frac{s^4 - 24ts^2 - 48t^2}{32s},$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4t^3 - B^2 = -\frac{(s^2 - 4t)^3(s^2 - 36t)}{2^{10}s^2};$$

$$p^\nu = t, \quad p'^\nu = -B, \quad p''^\nu = 6t^2.$$

$$p_{\frac{\nu}{2}} = \frac{s^2 - 4t}{8}, \quad p'_{\frac{\nu}{2}} = -\frac{3}{32} \cdot \frac{(s^2 - 4t)^2}{s}.$$

20. — *Cas de la cubique harmonique.* — L'invariant  $g_3$  est nul, lorsque se trouve remplie une condition entre les paramètres, qui est du second degré en B; il en résulte que  $\frac{s^2 + 8A}{12}$  est un carré.

Il faut donc prendre:

$$p^\nu = \square = \lambda^2,$$

$\lambda$  étant un nombre rationnel. D'où découlent les formules suivantes de représentation générale du cas où la cubique de Weierstrass est harmonique:

$$A = \frac{12\lambda^2 - s^2}{8}, \quad B = \lambda \left( \lambda^2 - \lambda s - \frac{s^2}{4} \right),$$

$$g_2 = \frac{1}{16} (s + 2\lambda)^2 (s + 6\lambda) (2\lambda - s), \quad g_3 = 0.$$

$$p^\nu = \lambda^2, \quad p'^\nu = -B,$$

$$p_{\frac{\nu}{2}} = \frac{s^2 - 4\lambda^2}{8}, \quad p'_{\frac{\nu}{2}} = -\frac{1}{8} (s + 2\lambda)^2 (s - 2\lambda);$$

Si la racine nulle  $e_1$  est  $p\omega_1 = 0$ , on a une nouvelle solution simple:

$$p\left(\frac{\nu}{2} + \omega_1\right) = \frac{1}{8} (s + 6\lambda) (s + 2\lambda), \quad p'\left(\frac{\nu}{2} + \omega_1\right) = (s + 2\lambda) \cdot p\left(\frac{\nu}{2} + \omega_1\right).$$