Nouvelle forme de la question précédente. Etude d'une relation homographique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

lution de celle-ci est réductible aux fonctions elliptiques quel que soit le coefficient a_0. Il suffit de rendre nul α_4 en posant $x = z - z_0$, puis de poser

$$x = \frac{a_3}{\xi - \frac{1}{2} a_2}$$

pour se ramener à une équation

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = \square .$$

Les invariants se présentent sous leur forme habituelle, où $a_4 = 0$. Bref, cette méthode conduit à la représentation suivante de la solution générale de l'équation de Fermat pour $a_4 = 0$:

$$x = \frac{\wp' w}{\wp t - \wp w}, \qquad \sqrt{X} = \frac{\wp' t}{\wp' w} . x^2 .$$

Comme d'une manière générale $\wp' w = - \frac{\sigma(2w)}{\sigma^4 w}$, ces expressions sont identiques à celles qui viennent d'être données, en liant les arguments u et t par la relation:

$$u = t + w .$$

Nouvelle forme de la question précédente. Etude d'une relation homographique.

7. — L'étude arithmogéométrique de certaines classes de triangles remarquables pose la question suivante:

« *Former les équations du second degré, à racines rationnelles,*
« *dont la somme et le produit sont reliés homographiquement.* »

La résolution de cette question dépend des fonctions elliptiques, avec un cas étendu de dégénérescence.

Voici l'étude complète de cette question.

8. — *Formules générales.* — Soient S et P la somme et le produit des racines de l'équation du second degré; ces expressions sont liées par la relation homographique:

$$P = \frac{AS + B}{S - s},$$

à trois coefficients A, B, s; avec la condition $As + B \neq 0$. Les racines étant supposées rationnelles la quantité

$$D = S^2 - 4P = \square ,$$

est un carré parfait et, par suite aussi, le polynome suivant du quatrième degré en S:

$$D(S - s)^2 \equiv S^4 - 2sS^3 + (s^2 - 4A)S^2 + 4(As - B)S + 4Bs = \square .$$

La question est ainsi ramenée à une équation de FERMAT, c'est-à-dire aux fonctions elliptiques.

Les invariants g_2 et g_3 des fonctions de WEIERSTRASS ont ici les expressions suivantes:

$$4.3.g_2 = s^4 + 16As^2 + 24Bs + 16A^2 = (s^2 + 8A)^2 + 24(Bs - 2A^2) ,$$

$$\begin{aligned} 8.27.g_3 &= -[s^6 + 24As^4 + 36Bs^3 + 120A^2s^2 + 288ABs - 64A^3 + 216B^2] \\ &= -[(s^2 + 8A)^3 + 36(Bs - 2A^2)(s^2 + 8A) + 216B^2] ; \end{aligned}$$

l'expression du discriminant Δ, ordonnée par rapport au puissances du paramètre s, n'est que du cinquième degré et se présente finalement sous la forme suivante:

$$\Delta = -(As + B)^2[Bs^3 - A^2s^2 + 18ABs + 27B^2 - 16A^3] ,$$

$$4.27\Delta = -(As + B)^2\{[54B + s(s^2 + 18A)]^2 - (s^2 + 12A)^3\} .$$

La solution fondamentale de définition,

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 ,$$

des fonctions de WEIERSTRASS est

$$\wp\nu = \frac{s^2 + 8A}{12} , \quad \wp'\nu = -B , \quad \wp''\nu = 2A^2 - Bs .$$

$$\wp 2\nu = \frac{s^2}{12} - \frac{A^2}{B}s + \frac{A^4}{B^2} - \frac{4}{3}A ,$$

$$\wp' 2\nu = \frac{A^2}{B}s^2 + \left(2A - 3\frac{A^4}{B^2}\right)s + \frac{2A^6}{B^3} - 4\frac{A^3}{B} + B .$$

Dans le cas actuel, $\frac{\nu}{2}$ est l'argument d'un arithmopoint de la cubique:

$$\wp\frac{\nu}{2} = \frac{s^2 - 4A}{12} , \quad \wp'\frac{\nu}{2} = As + B , \quad \wp''\frac{\nu}{2} = -s.\wp'\frac{\nu}{2} .$$

D'où:

$$\mathfrak{p}\left(\frac{3}{2}v\right) = \frac{s^2}{12} + \frac{B}{A}s + \frac{B^2}{A^2} - \frac{A}{3},$$

$$\mathfrak{p}'\left(\frac{3}{2}v\right) = \frac{B}{A}\left(s + \frac{B}{A}\right) \cdot \left(s + \frac{2B^2 - A^3}{AB}\right).$$

Pour A, B et s quelconques, les arguments $\frac{v}{2}$, v, $\frac{3}{2}v$ et $2v$ donnent ainsi des expressions de $\mathfrak{p}u$ et $\mathfrak{p}'u$ qui sont des polynomes en s, du second degré au plus.

Les formules de correspondance entre les solutions de l'équation cubique et l'équation de Fermat sont:

$$S - \frac{1}{2}s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'v}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v}, \qquad \pm \sqrt{D}(S - s) = \mathfrak{p}(u + v) - \mathfrak{p}u\ ;$$

et inversement:

$$2\mathfrak{p}u + \mathfrak{p}v = \left(S - \frac{1}{2}s\right)^2 \mp \sqrt{D}(S - s),$$

$$\mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'v = (2S - s) \cdot (\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v).$$

Pour $u = v$, la vraie valeur de S est:

$$S = \frac{1}{2}\left[s + \frac{\mathfrak{p}''v}{\mathfrak{p}'v}\right];$$

donc une première solution de l'équation de Fermat est:

$$S = s - \frac{A^2}{B}, \quad P = -\frac{B}{A}\left(s + \frac{B^2 - A^3}{AB}\right), \quad \sqrt{D} = s + \frac{2B^2 - A^3}{AB};$$

les racines de l'équation correspondante du second degré sont:

$$X' = -\frac{B}{A}, \qquad X'' = s + \frac{B^2 - A^3}{AB}.$$

A l'argument $u = -2v$ correspond le même couple (X', X'').

A l'argument $u = -\frac{v}{2}$ correspond la solution sans intérêt $S = s$.

Aux valeurs $u = \frac{v}{2}$ et $u = -\frac{3v}{2}$ de l'argument correspondent la solution évidente $S = -\frac{B}{A}$, $P = 0$.

Pour $u = 2v$:

$$S = \frac{A^2}{B} \cdot \frac{s - \frac{A^2}{B} + \frac{2B}{A} - \frac{B^3}{A^4}}{s - \frac{A^2}{B} + \frac{2B}{A}},$$

$$S - s = -\frac{\left(s + \frac{B}{A} - \frac{A^2}{B}\right)^2}{s + \frac{2B}{A} - \frac{A^2}{B}}, \quad \text{etc.}$$

9. — En général, *le problème d'homographie admet ainsi une infinité de solutions*, qui correspondent aux multiples entiers de l'argument w. Ainsi que vont le mettre en évidence les considérations du paragraphe suivant, l'équation présentement étudiée est équivalente à l'équation la plus générale ayant la solution donnée w. En général donc, il n'y a pas d'autre solution rationnelle que celle de la forme $u = n.w$, avec $v + 2w =$ période.

En général, v et w ne sont pas des parties aliquotes de période et il y a une infinité de solutions. Mais lorsque le rapport de v et d'une période est un nombre commensurable, les solutions données par $v = nw$ sont en nombre limité.

Cette circonstance se produit lorsque $B = 0$, car alors $\wp' v = 0$ (voir paragraphe 21). Il en est de même lorsque $A = 0$.

Pour $A = 0$,

$$12 g_2 = s(s^3 + 24B), \qquad 8.27 g_3 = 108B^2 - (s^3 + 18B)^2,$$

$$\Delta = -B^3(s^3 + 27B),$$

$$\wp v = \frac{s^2}{12}, \qquad \wp' v = -B, \qquad \wp'' v = -Bs,$$

$$\wp \frac{v}{2} = \wp 2v = \wp v;$$

$\wp 3w$ devient infini, et par suite:

$$w = \frac{2}{3}\varpi;$$

2ϖ étant une période. Deux arithmopoints seulement sont connus sur la cubique; ce sont des points d'inflexion.

10. — En dehors de ces cas relativement généraux $A = 0$ ou $B = 0$, on peut encore citer le cas

$$A = -1 , \quad B = 1 , \quad s = 3 ,$$

pour lequel

$$\mathfrak{p}w = \frac{13}{12} , \quad \mathfrak{p}'w = +2 , \quad \mathfrak{p}''w = 6 ,$$

$$\mathfrak{p}v = \frac{1}{12} , \quad \mathfrak{p}'v = -1 , \quad \mathfrak{p}''v = -1 ,$$

$$\mathfrak{p}3w = -\frac{11}{12} , \quad \mathfrak{p}'3w = 0 ,$$

$$\mathfrak{p}2v = \frac{1}{12} , \quad \mathfrak{p}'2v = 1 ;$$

$$v = \frac{2\varpi'}{3} ;$$

ici encore les arithmopoints de la cubique se réduisent aux points d'inflexion, à un sommet et aux points qui s'en déduisent par alignement: au total, cinq arithmopoints sur la cubique. C'est à cette circonstance particulière qu'est liée l'*inexistence d'arithmotriangles pseudoisoscèles.*

11. — Le problème d'homographie, qui vient d'être posé et résolu, dépend ainsi d'une équation de Fermat du type spécial pour lequel le polynome du quatrième degré a un zéro rationnel. L'argument $w = -\frac{v}{2}$ est tel que:

$$\mathfrak{p}w = \frac{s^2 - 4A}{12} , \quad \mathfrak{p}'w = -(As + B) \neq 0 , \quad \mathfrak{p}''w = s . \mathfrak{p}'w .$$

Réciproquement, soit l'équation la plus générale de Fermat pour laquelle se produise la circonstance spécifiée. Elle peut être caractérisée par l'ensemble des valeurs numériques de $\mathfrak{p}w$, $\mathfrak{p}'w$ et $\mathfrak{p}''w$. D'où successivement s, A et B:

$$s = \frac{\mathfrak{p}''w}{\mathfrak{p}'w} , \quad A = \frac{s^2}{4} - 3\mathfrak{p}w , \quad B = -(As + \mathfrak{p}'w)$$

par trois formules nettes de toute indétermination.

Par suite, *les équations de Fermat, pour un polynome du quatrième degré avec zéro rationnel, jouissent de cette nouvelle propriété* *de donner toujours lieu à une homographie entre le produit et la somme des racines d'équations du second degré.*

La valeur de $\wp' w$ doit essentiellement être distincte de zéro.

12. — *Expression des résultats.* — Les considérations exposées dans la première partie de ce travail trouvent une application immédiate dans l'expression finale des résultats du problème d'homographie.

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} + s\right),$$

$$S - s = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} - s\right) = \frac{\sigma 2w}{\sigma^2 w} \cdot \frac{\sigma^2(u - w)}{\sigma(u - 2w) \,.\, \sigma u},$$

car S — s n'est autre ici que la fonction x des paragraphes 5 et 6; le polynome en S admet s pour zéro rationnel:

$$S - s = x \,.$$

Il vient ensuite:

$$\sqrt{D}(S - s) = \wp(u + v) - \wp u \,;$$

les racines X′ et X″ de l'équation du second dergé sont alors:

$$(S - s) \,.\, X' = \wp u - \wp w \,,$$

$$(S - s) \,.\, X'' = \wp(u + v) - \wp w \,;$$

$$X' = \frac{1}{\sigma 2w} \cdot \frac{\sigma u \,.\, \sigma(3w - u)}{\sigma(u - w) \,.\, \sigma(u - 2w)},$$

$$X'' = \frac{1}{\sigma 2w} \cdot \frac{\sigma(u + w) \,.\, \sigma(u - 2w)}{\sigma u \,.\, \sigma(w - u)},$$

$$\frac{X'}{X''} = \frac{\sigma(u + w)}{\sigma(u - 3w)} \cdot \frac{\sigma^2(u - 2w)}{\sigma^2 u} \,.$$

$$P = \wp 2w - \wp(u - w) = \frac{\sigma(u - 3w) \,.\, \sigma(u + w)}{\sigma^2 2w \,.\, \sigma^2(u - w)} \,.$$

On peut encore écrire:

$$X' = \gamma \frac{\wp\left(u - \frac{3}{2}w\right) - \wp\left(\frac{3}{2}w\right)}{\wp\left(u - \frac{3}{2}w\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)},$$

$$X'' = \gamma \frac{\wp\left(u - \frac{w}{2}\right) - \wp\left(\frac{3}{2}w\right)}{\wp\left(u - \frac{w}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)} \,;$$

la constante γ a pour expression:

$$\gamma = -\frac{1}{\sigma(2w)} \cdot \left[\frac{\sigma\left(\frac{3}{2}w\right)}{\sigma\left(\frac{1}{2}w\right)}\right]^2 .$$

En général $\wp\left(\frac{3}{2}w\right)$ et $\wp\frac{w}{2}$ sont irrationnelles; cette irrationnalité n'est introduite qu'en apparence dans les expressions de X′ et X″.

Considérées comme fonction de u, les racines X′ et X″ satisfont à l'identité

$$X''(u) \equiv X'(u + w) \;;$$

c'est la même fonction avec des arguments différents de la constante w (propriété caractéristique des relations doublement quadratiques et symétriques).

13. — *Equation avec* P *pour inconnue.* — Comme $S - s = x$, la méthode du paragraphe 8 revient à prendre pour inconnue une quantité inversement proportionnelle à $S - s$; mais ici:

$$S = \frac{Ps + B}{P - A}, \qquad S - s = \frac{As + B}{P - A} .$$

en prenant P pour inconnue principale, on est assuré *a priori* d'avoir à rendre carré un polynome cubique. En fait, l'équation en P est:

$$D(P - A)^2 = (Ps + B)^2 - 4P(P - A)^2 ,$$

$$-4P^3 + (s^2 + 8A)P^2 + 2(Bs - 2A^2)P + B^2 = \square .$$

Ce qui conduit aux formules suivantes:

$$P = \wp v - \wp t , \qquad P - A = \wp w - \wp t ,$$

$$S - s = \frac{\wp' w}{\wp t - \wp w} ; \qquad \sqrt{D} = \frac{\wp' t}{\wp t - \wp w} .$$

$$X' = \frac{1}{2} \cdot \frac{s(\wp t - \wp v) + \wp' v - \wp' t}{\wp t - \wp w} \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{-f(-t)}{\wp t - \wp w} ,$$

$$X'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{s(\wp t - \wp v) + \wp' v + \wp' t}{\wp t - \wp w} \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{-f(t)}{\wp t - \wp w} ,$$

en introduisant la fonction $f(t)$ du paragraphe 5:

$$f(t) \equiv \wp' t - \wp' v - s(\wp t - \wp v) \;;$$

d'où pour X′ et X″ les expressions en produits de sigma se réduisant à celles du paragraphe 12 par simple changement d'argument $u = t + w$.

14. — *Etude directe de la relation entre* X′ *et* X″. — Les racines X′, X″ sont liées par la relation

$$xy(x + y - s) = \mathrm{A}(x + y) + \mathrm{B}\,,$$

représentative d'une cubique plane. La discussion précédente a mis en évidence l'existence d'arithmopoints sur cette cubique quels que soient A, B et s:

$$x = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\,, \qquad y = s + \frac{\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^3}{\mathrm{AB}}\,,$$

$$x = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\,, \qquad y = 0\,, \ldots$$

et ceux qui en résultent par symétrie par rapport à l'axe $x = y$.

D'autre part, si on se donne x, l'équation en y est du second degré; de même l'équation en x pour une valeur donnée de y. Ainsi, de tout couple donné (x_1, y_1) représentatif d'un arithmopoint, il est possible de déduire immédiatement deux nouvelles solutions (x_1, y_2) et (x_2, y_1) et ainsi de suite dans les deux sens.

Ceci revient à partir d'un arithmopoint de cette cubique plane et à mener les parallèles à l'une et à l'autre des asymptotes $x = 0$, $y = 0$. C'est sous une forme élémentaire l'addition des arguments des fonctions elliptiques.

La cubique considérée peut-être représentée par les fonctions de Weierstrass au moyen des formules qui ont été données aux paragraphes 12 et 13, pour les expressions de X′ et X″.

Interprétation géométrique.

15. — Soient t, t' deux arithmopoints quelconques d'une arithmoconique (P) du plan des coordonnées. En désignant par S et P