Observations préliminaires sur les équations de Fermat dans le cas où le polynome du quatrième degré a au moins un zéro rationnel.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

nous nous sommes occupés ici et qui sont aussi les ensembles de capacité électro-statique nulle sont également ceux qui ne sauraient être ensembles de singularités pour une fonction harmonique bornée, ensembles au sujet desquels M. H. Lebesgue avait fait connaître des résultats importants [1].

FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES ÉQUATIONS DE FERMAT DANS LE CAS OÙ LE POLYNOME DU QUATRIÈME DEGRÉ A AU MOINS UN ZÉRO RATIONNEL.

1. — L'étude d'une équation indéterminée du quatrième degré de FERMAT

$$\alpha_0 z^4 + 4\alpha_1 z^3 + 6\alpha_2 z^2 + 4\alpha_3 z + \alpha_4 = y^2 ,$$

dont une solution particulière est connue *a priori*, se ramène tout d'abord, par une transformation homographique sur la variable z, à celle d'une équation du même type, mais avec $\alpha_0 = 1$:

$$x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = X = \square ;$$

la solution connue z_0 est devenue la valeur infinie de la nouvelle variable x.

---

[1] *C. R.* Ac. Sc., t. 176, p. 1097, avril 1923.

Les formules générales de l'inversion elliptique résolvent alors la question. Les fonctions elliptiques sont caractérisées par les invariants:

$$g_2 = a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 ,$$
$$g_3 = a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 ;$$

la cubique de Weierstrass est particulière en ce sens qu'elle admet au moins un arithmopoint d'argument φ tel que:

$$\mathfrak{p}\varphi = a_1^2 - a_2 , \qquad \mathfrak{p}'\varphi = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3 ;$$

en général, la cubique admet toute la chaîne illimitée dans les deux sens de solutions -2φ, $-\varphi$, φ, 2φ, ... comprises dans la formule $u = n.\varphi$ (n entier algébrique quelconque). Dans le cas général, on ne connaît que ces arithmopoints.

2. — En général, la connaissance des valeurs du système des trois nombres $\mathfrak{p}u_0$, $\mathfrak{p}'u_0$, $\mathfrak{p}''u_0$ suffit pour déterminer complètement une cubique de Weierstrass. Les invariants sont définis par les formules:

$$g_2 = 12\mathfrak{p}^2 - 2\mathfrak{p}'' ;$$
$$g_3 = -8\mathfrak{p}^3 + 2\mathfrak{p}\mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}'^2 ;$$

dans le cas actuel de fonctions elliptiques liées à une équation de Fermat, la question est complètement définie par la connaissance de $\mathfrak{p}\varphi$, $\mathfrak{p}'\varphi$ et g_2 par exemple.

Les formules générales de résolution sont alors, avec un argument variable u:

$$x = -a_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'\varphi}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}\varphi} ,$$
$$\sqrt{X} = \mathfrak{p}u - \mathfrak{p}(u + \varphi) .$$

Dans le cas de forme illusoire pour l'expression de x (c'est-à-dire lorsque $u = \varphi$), la vraie valeur de x est

$$x = -a_1 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{p}''u}{\mathfrak{p}'u} .$$

Aux couples de solutions de l'équation de Fermat correspondant à une même valeur de x et aux deux déterminations du radical $\sqrt{X}$, correspondent des arguments u, u' tels que:

$$u + u' + v = \text{une période}.$$

Ces généralités rappelées [1], nous supposerons dorénavant que l'équation considérée est du type spécial pour lequel le polynome du quatrième degré X a un zéro rationnel.

3. — Soient $x_1 \ldots x_4$ les quatre zéros de $X = 0$; les arguments correspondants sont:

$$u_1 = -\frac{v}{2} + \omega_1, \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_2, \quad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega_3, \quad u_4 = -\frac{v}{2}.$$

ω_1, ω_2, ω_3 sont trois demi-périodes auxquelles correspondent les trois racines de $\mathfrak{p}'u = 0$:

$$e_1 = \mathfrak{p}\omega_1, \qquad e_2 = \mathfrak{p}\omega_2, \qquad e_3 = \mathfrak{p}\omega_3.$$

La différence de deux quelconques de ces quatre valeurs de u étant une demi-période, si ces deux arguments représentent deux zéros rationnels de X, c'est-à-dire deux arithmopoints de la cubique, l'une des trois racines e est rationnelle: aux arithmopoints u_1 et u_2, par exemple, correspond une valeur rationnelle de e_3:

$$u_1 - u_2 = \omega_1 - \omega_2 = \omega_3 + \text{période};$$

$$e_3 = \mathfrak{p}(u_1 - u_2).$$

D'où les propositions suivantes:

Si le polynome X *a deux zéros rationnels, l'équation* $\mathfrak{p}'u = 0$ *a une racine rationnelle.*

Si le polynome X *a ses quatre zéros rationnels, l'équation* $\mathfrak{p}'u = 0$ *a ses trois racines rationnelles.*

Réciproquement, *dans le cas d'un polynome* X *ayant déjà un zéro rationnel, la connaissance d'une racine rationnelle de l'équation cubique* $\mathfrak{p}'u = 0$ *entraîne celle d'un second zéro rationnel du polynome* X.

---

[1] Voir à ce sujet mon étude générale *Sur les équations indéterminées de Fermat* du *Bulletin de la Société mathématique de France* (mars 1928).

Dans le même cas, l'existence de trois racines rationnelles de l'équation cubique, implique l'existence de quatre zéros rationnels pour le polynome du quatrième degré.

4. — Toujours dans le cas d'un polynome X doué d'un zéro rationnel, reprenons les formules d'inversion elliptique. Sans restreindre la généralité des résultats, on peut supposer que la racine rationnelle connue *a priori* est $x = 0$; le coefficient a_4 est nul. Il existe alors un nouvel arithmopoint w sur la cubique:

$$\mathfrak{p}w = \frac{1}{2}a_2 , \qquad \mathfrak{p}'w = a_3 , \qquad \mathfrak{p}''w = 2a_1 a_3 ;$$

d'où, par application des formules d'addition des fonctions elliptiques:

$$\mathfrak{p}2w = \mathfrak{p}v , \quad \mathfrak{p}'2w = -\mathfrak{p}'v ;$$

$$2w + v = \text{période} ;$$

l'argument w est identique à l'une des quatre valeurs $u_1 \ldots u_4$.

La connaissance d'un zéro rationnel de X est ainsi équivalente à celle d'une des quatre déterminations de la moitié de l'argument v.

Inversement, supposons connues les valeurs de $\mathfrak{p}w$, $\mathfrak{p}'w$, $\mathfrak{p}''w$. Les invariants g_2, g_3 en résultent par les formules données plus haut. Les formules:

$$s = \frac{\mathfrak{p}''w}{\mathfrak{p}'w} , \qquad \mathfrak{p}v + 2\mathfrak{p}w = \frac{s^2}{4} , \qquad \mathfrak{p}'v - \mathfrak{p}'w = s(\mathfrak{p}v - \mathfrak{p}w)$$

permettent de calculer successivement le coefficient angulaire s de la tangente en l'arithmopoint w de la cubique de Weierstrass, la valeur de $\mathfrak{p}v$ et celle de $\mathfrak{p}'v$.

Il existe une infinité de polynomes X associables à une même cubique de Weierstrass (tant que l'on ne précise pas la nature de v). Mais la détermination de X s'effectue sans ambiguïté lorsque sont données $\mathfrak{p}v$, $\mathfrak{p}'v$, $\mathfrak{p}''v$ (ou g_2). Ici les formules pour la détermination de X se présentent sous la forme simple

$$a_1 = \frac{s}{2} , \qquad a_2 = 2\mathfrak{p}w , \qquad a_3 = \mathfrak{p}'w , \qquad a_4 = 0 .$$

5. — *Expression de* x *en produit de facteurs* σ. — L'expression de x est ensuite:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'v}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v} - s\right).$$

Considérons la fonction entière:

$$f(u) = \mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'v - s(\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v) \ ;$$

elle admet le zéro simple $u = v$ et le zéro double $u = w$; elle s'exprime donc sous la forme

$$f(u) = -\frac{2}{C} \cdot \frac{\sigma(u - v) \cdot \sigma^2(u - w)}{\sigma^3 u} \ ,$$

C étant une constante qui se détermine simplement en attribuant à u une valeur particulière telle que $u = -v$ ou $u = -w$.

$$f(-v) = -2\mathfrak{p}'v \ , \qquad f(-w) = -2\mathfrak{p}'w \ .$$

$$C = \sigma^2 w \cdot \sigma 2w \ .$$

D'ailleurs un calcul direct donne:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{\mathfrak{p}'u + \mathfrak{p}'w}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}w} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathfrak{p}'u + \mathfrak{p}'v}{\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v} + \frac{s}{2} \ ;$$

(après suppression d'un facteur, commun aux deux termes, $\mathfrak{p}u - \mathfrak{p}v$). D'où:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \zeta(u - v) + 2\zeta(u - w) - 3\zeta u$$

(la constante additive $\zeta v + 2\zeta w + \frac{s}{2}$ étant évidemment nulle); l'intégration donne alors l'expression ci-dessus de $f(u)$ en produit de fonctions sigma.

Finalement l'expression de x (dans le cas où l'un des zéro est $x = 0$, correspondant à $u = w$) est:

$$x = \frac{\sigma 2w}{\sigma^2 w} \times \frac{\sigma^2(u - w)}{\sigma(u - 2w) \cdot \sigma u} \ .$$

6. — *Autre représentation des résultats précédents.* — Par le fait que le polynome en z du quatrième degré a un zéro rationnel z_0, qui est d'ailleurs une solution de l'équation de Fermat, la réso-

lution de celle-ci est réductible aux fonctions elliptiques quel que soit le coefficient a_0. Il suffit de rendre nul α_4 en posant $x = z - z_0$, puis de poser

$$x = \frac{a_3}{\xi - \frac{1}{2}a_2}$$

pour se ramener à une équation

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = \square \ .$$

Les invariants se présentent sous leur forme habituelle, où $a_4 = 0$. Bref, cette méthode conduit à la représentation suivante de la solution générale de l'équation de Fermat pour $a_4 = 0$:

$$x = \frac{\mathfrak{p}'w}{\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}w}, \qquad \sqrt{X} = \frac{\mathfrak{p}'t}{\mathfrak{p}'w} \cdot x^2 \ .$$

Comme d'une manière générale $\mathfrak{p}'w = -\frac{\sigma(2w)}{\sigma^4 w}$, ces expressions sont identiques à celles qui viennent d'être données, en liant les arguments u et t par la relation:

$$u = t + w \ .$$

Nouvelle forme de la question précédente. Etude d'une relation homographique.

7. — L'étude arithmogéométrique de certaines classes de triangles remarquables pose la question suivante:

« *Former les équations du second degré, à racines rationnelles,* « *dont la somme et le produit sont reliés homographiquement.* »

La résolution de cette question dépend des fonctions elliptiques, avec un cas étendu de dégénérescence.

Voici l'étude complète de cette question.

8. — *Formules générales.* — Soient S et P la somme et le produit des racines de l'équation du second degré; ces expressions sont liées par la relation homographique:

$$P = \frac{AS + B}{S - s} \ ,$$