FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

Autor(en): **Turrière, Emile**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21256

nous nous sommes occupés ici et qui sont aussi les ensembles de capacité électro-statique nulle sont également ceux qui ne sauraient être ensembles de singularités pour une fonction harmonique bornée, ensembles au sujet desquels M. H. Lebesgue avait fait connaître des résultats importants [1].

FORMULES ELLIPTIQUES POUR LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DE FERMAT

PAR

Emile Turrière (Montpellier).

Observations préliminaires sur les équations de Fermat dans le cas où le polynome du quatrième degré a au moins un zéro rationnel.

1. — L'étude d'une équation indéterminée du quatrième degré de Fermat

$$\alpha_0 z^4 + 4\alpha_1 z^3 + 6\alpha_2 z^2 + 4\alpha_3 z + \alpha_4 = y^2 ,$$

dont une solution particulière est connue *a priori*, se ramène tout d'abord, par une transformation homographique sur la variable z, à celle d'une équation du même type, mais avec $\alpha_0 = 1$:

$$x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = \mathrm{X} = \square ;$$

la solution connue z_0 est devenue la valeur infinie de la nouvelle variable x.

---

[1] *C. R.* Ac. Sc., t. 176, p. 1097, avril 1923.

Les formules générales de l'inversion elliptique résolvent alors la question. Les fonctions elliptiques sont caractérisées par les invariants:

$$g_2 = a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 ,$$
$$g_3 = a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 ;$$

la cubique de Weierstrass est particulière en ce sens qu'elle admet au moins un arithmopoint d'argument v tel que:

$$\wp v = a_1^2 - a_2 , \qquad \wp' v = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3 ;$$

en général, la cubique admet toute la chaîne illimitée dans les deux sens de solutions $-2v$, $-v$, v, $2v$, ... comprises dans la formule $u = n.v$ (n entier algébrique quelconque). Dans le cas général, on ne connaît que ces arithmopoints.

2. — En général, la connaissance des valeurs du système des trois nombres $\wp u_0$, $\wp' u_0$, $\wp'' u_0$ suffit pour déterminer complètement une cubique de WEIERSTRASS. Les invariants sont définis par les formules:

$$g_2 = 12\wp^2 - 2\wp'' ;$$
$$g_3 = -8\wp^3 + 2\wp\wp'' - \wp'^2 ;$$

dans le cas actuel de fonctions elliptiques liées à une équation de Fermat, la question est complètement définie par la connaissance de $\wp v$, $\wp' v$ et g_2 par exemple.

Les formules générales de résolution sont alors, avec un argument variable u:

$$x = -a_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} ,$$
$$\sqrt{X} = \wp u - \wp(u + v) .$$

Dans le cas de forme illusoire pour l'expression de x (c'est-à-dire lorsque $u = v$), la vraie valeur de x est

$$x = -a_1 + \frac{1}{2} \frac{\wp'' u}{\wp' u} .$$

Aux couples de solutions de l'équation de Fermat correspondant à une même valeur de x et aux deux déterminations du radical $\sqrt{X}$, correspondent des arguments u, u' tels que:

$$u + u' + v = \text{une période} .$$

Ces généralités rappelées[1], nous supposerons dorénavant que l'équation considérée est du type spécial pour lequel le polynome du quatrième degré X a un zéro rationnel.

3. — Soient $x_1 \ldots x_4$ les quatre zéros de $X = 0$; les arguments correspondants sont:

$$u_1 = -\frac{v}{2} + \omega_1 , \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega_2 , \quad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega_3 , \quad u_4 = -\frac{v}{2} .$$

ω_1, ω_2, ω_3 sont trois demi-périodes auxquelles correspondent les trois racines de $\wp' u = 0$:

$$e_1 = \wp\omega_1 , \qquad e_2 = \wp\omega_2 , \qquad e_3 = \wp\omega_3 .$$

La différence de deux quelconques de ces quatre valeurs de u étant une demi-période, si ces deux arguments représentent deux zéros rationnels de X, c'est-à-dire deux arithmopoints de la cubique, l'une des trois racines e est rationnelle: aux arithmopoints u_1 et u_2, par exemple, correspond une valeur rationnelle de e_3:

$$u_1 - u_2 = \omega_1 - \omega_2 = \omega_3 + \text{période} ;$$

$$e_3 = \wp(u_1 - u_2) .$$

D'où les propositions suivantes:

Si le polynome X *a deux zéros rationnels, l'équation* $\wp' u = 0$ *a une racine rationnelle.*

Si le polynome X *a ses quatre zéros rationnels, l'équation* $\wp' u = 0$ *a ses trois racines rationnelles.*

Réciproquement, *dans le cas d'un polynome* X *ayant déjà un zéro rationnel, la connaissance d'une racine rationnelle de l'équation cubique* $\wp' u = 0$ *entraîne celle d'un second zéro rationnel du polynome* X.

[1] Voir à ce sujet mon étude générale *Sur les équations indéterminées de Fermat* du *Bulletin de la Société mathématique de France* (mars 1928).

Dans le même cas, l'existence de trois racines rationnelles de l'équation cubique, implique l'existence de quatre zéros rationnels pour le polynome du quatrième degré.

4. — Toujours dans le cas d'un polynome X doué d'un zéro rationnel, reprenons les formules d'inversion elliptique. Sans restreindre la généralité des résultats, on peut supposer que la racine rationnelle connue *a priori* est $x = 0$; le coefficient a_4 est nul. Il existe alors un nouvel arithmopoint w sur la cubique:

$$\mathfrak{p}w = \frac{1}{2}a_2 \,, \qquad \mathfrak{p}'w = a_3 \,, \qquad \mathfrak{p}''w = 2a_1 a_3 \;;$$

d'où, par application des formules d'addition des fonctions elliptiques:

$$\mathfrak{p}2w = \mathfrak{p}v \,, \quad \mathfrak{p}'2w = -\mathfrak{p}'v \;;$$

$$2w + v = \text{période} \;;$$

l'argument w est identique à l'une des quatre valeurs $u_1 \ldots u_4$.

La connaissance d'un zéro rationnel de X est ainsi équivalente à celle d'une des quatre déterminations de la moitié de l'argument v.

Inversement, supposons connues les valeurs de $\mathfrak{p}w$, $\mathfrak{p}'w$, $\mathfrak{p}''w$. Les invariants g_2, g_3 en résultent par les formules données plus haut. Les formules:

$$s = \frac{\mathfrak{p}''w}{\mathfrak{p}'w} \,, \qquad \mathfrak{p}v + 2\mathfrak{p}w = \frac{s^2}{4} \,, \qquad \mathfrak{p}'v - \mathfrak{p}'w = s(\mathfrak{p}v - \mathfrak{p}w)$$

permettent de calculer successivement le coefficient angulaire s de la tangente en l'arithmopoint w de la cubique de Weierstrass, la valeur de $\mathfrak{p}v$ et celle de $\mathfrak{p}'v$.

Il existe une infinité de polynomes X associables à une même cubique de Weierstrass (tant que l'on ne précise pas la nature de v). Mais la détermination de X s'effectue sans ambiguïté lorsque sont données $\mathfrak{p}v$, $\mathfrak{p}'v$, $\mathfrak{p}''v$ (ou g_2). Ici les formules pour la détermination de X se présentent sous la forme simple

$$a_1 = \frac{s}{2} \,, \qquad a_2 = 2\mathfrak{p}w \,, \qquad a_3 = \mathfrak{p}'w \,, \qquad a_4 = 0 \,.$$

5. — *Expression de* x *en produit de facteurs* σ. — L'expression de x est ensuite:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} - s\right).$$

Considérons la fonction entière:

$$f(u) = \wp' u - \wp' v - s(\wp u - \wp v) ;$$

elle admet le zéro simple $u = v$ et le zéro double $u = w$; elle s'exprime donc sous la forme

$$f(u) = -\frac{2}{C}\cdot\frac{\sigma(u-v)\,.\,\sigma^2(u-w)}{\sigma^3 u},$$

C étant une constante qui se détermine simplement en attribuant à u une valeur particulière telle que $u = -v$ ou $u = -w$.

$$f(-v) = -2\wp' v\,, \qquad f(-w) = -2\wp' w\,.$$

$$C = \sigma^2 w\,.\,\sigma 2w\,.$$

D'ailleurs un calcul direct donne:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{\wp' u + \wp' w}{\wp u - \wp w} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} + \frac{s}{2}\,;$$

(après suppression d'un facteur, commun aux deux termes, $\wp u - \wp v$). D'où:

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \zeta(u-v) + 2\zeta(u-w) - 3\zeta u$$

(la constante additive $\zeta v + 2\zeta w + \frac{s}{2}$ étant évidemment nulle); l'intégration donne alors l'expression ci-dessus de $f(u)$ en produit de fonctions sigma.

Finalement l'expression de x (dans le cas où l'un des zéros est $x = 0$, correspondant à $u = w$) est:

$$x = \frac{\sigma 2w}{\sigma^2 w}\times\frac{\sigma^2(u-w)}{\sigma(u-2w)\,.\,\sigma u}\,.$$

6. — *Autre représentation des résultats précédents.* — Par le fait que le polynome en z du quatrième degré a un zéro rationnel z_0, qui est d'ailleurs une solution de l'équation de Fermat, la réso-

lution de celle-ci est réductible aux fonctions elliptiques quel que soit le coefficient a_0. Il suffit de rendre nul α_4 en posant $x = z - z_0$, puis de poser

$$x = \frac{a_3}{\xi - \frac{1}{2} a_2}$$

pour se ramener à une équation

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = \square \, .$$

Les invariants se présentent sous leur forme habituelle, où $a_4 = 0$. Bref, cette méthode conduit à la représentation suivante de la solution générale de l'équation de Fermat pour $a_4 = 0$:

$$x = \frac{\wp' w}{\wp t - \wp w} \, , \qquad \sqrt{X} = \frac{\wp' t}{\wp' w} \cdot x^2 \, .$$

Comme d'une manière générale $\wp' w = -\frac{\sigma(2w)}{\sigma^4 w}$, ces expressions sont identiques à celles qui viennent d'être données, en liant les arguments u et t par la relation:

$$u = t + w \, .$$

Nouvelle forme de la question précédente. Etude d'une relation homographique.

7. — L'étude arithmogéométrique de certaines classes de triangles remarquables pose la question suivante:

« *Former les équations du second degré, à racines rationnelles,* « *dont la somme et le produit sont reliés homographiquement.* »

La résolution de cette question dépend des fonctions elliptiques, avec un cas étendu de dégénérescence.

Voici l'étude complète de cette question.

8. — *Formules générales.* — Soient S et P la somme et le produit des racines de l'équation du second degré; ces expressions sont liées par la relation homographique:

$$P = \frac{AS + B}{S - s} \, ,$$

à trois coefficients A, B, s; avec la condition $As + B \neq 0$. Les racines étant supposées rationnelles la quantité

$$D = S^2 - 4P = \square ,$$

est un carré parfait et, par suite aussi, le polynome suivant du quatrième degré en S:

$$D(S - s)^2 \equiv S^4 - 2sS^3 + (s^2 - 4A)S^2 + 4(As - B)S + 4Bs = \square .$$

La question est ainsi ramenée à une équation de FERMAT, c'est-à-dire aux fonctions elliptiques.

Les invariants g_2 et g_3 des fonctions de WEIERSTRASS ont ici les expressions suivantes:

$$4.3.g_2 = s^4 + 16As^2 + 24Bs + 16A^2 = (s^2 + 8A)^2 + 24(Bs - 2A^2) ,$$

$$\begin{aligned} 8.27.g_3 &= -[s^6 + 24As^4 + 36Bs^3 + 120A^2s^2 + 288ABs - 64A^3 + 216B^2] \\ &= -[(s^2 + 8A)^3 + 36(Bs - 2A^2)(s^2 + 8A) + 216B^2] ; \end{aligned}$$

l'expression du discriminant Δ, ordonnée par rapport au puissances du paramètre s, n'est que du cinquième degré et se présente finalement sous la forme suivante:

$$\Delta = -(As + B)^2[Bs^3 - A^2s^2 + 18ABs + 27B^2 - 16A^3] ,$$

$$4.27\Delta = -(As + B)^2\{[54B + s(s^2 + 18A)]^2 - (s^2 + 12A)^3\} .$$

La solution fondamentale de définition,

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 ,$$

des fonctions de WEIERSTRASS est

$$\wp\nu = \frac{s^2 + 8A}{12} , \quad \wp'\nu = -B , \quad \wp''\nu = 2A^2 - Bs .$$

$$\wp 2\nu = \frac{s^2}{12} - \frac{A^2}{B}s + \frac{A^4}{B^2} - \frac{4}{3}A ,$$

$$\wp' 2\nu = \frac{A^2}{B}s^2 + \left(2A - 3\frac{A^4}{B^2}\right)s + \frac{2A^6}{B^3} - 4\frac{A^3}{B} + B .$$

Dans le cas actuel, $\frac{\nu}{2}$ est l'argument d'un arithmopoint de la cubique:

$$\wp\frac{\nu}{2} = \frac{s^2 - 4A}{12} , \quad \wp'\frac{\nu}{2} = As + B , \quad \wp''\frac{\nu}{2} = -s . \wp'\frac{\nu}{2} .$$

D'où:

$$\mathfrak{p}\left(\frac{3}{2}v\right)=\frac{s^2}{12}+\frac{B}{A}s+\frac{B^2}{A^2}-\frac{A}{3},$$

$$\mathfrak{p}'\left(\frac{3}{2}v\right)=\frac{B}{A}\left(s+\frac{B}{A}\right)\cdot\left(s+\frac{2B^2-A^3}{AB}\right).$$

Pour A, B et s quelconques, les arguments $\frac{v}{2}$, v, $\frac{3}{2}v$ et $2v$ donnent ainsi des expressions de $\mathfrak{p}u$ et $\mathfrak{p}'u$ qui sont des polynomes en s, du second degré au plus.

Les formules de correspondance entre les solutions de l'équation cubique et l'équation de Fermat sont:

$$S-\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{p}'u-\mathfrak{p}'v}{\mathfrak{p}u-\mathfrak{p}v}, \qquad \pm\sqrt{D}(S-s)=\mathfrak{p}(u+v)-\mathfrak{p}u\ ;$$

et inversement:

$$2\mathfrak{p}u+\mathfrak{p}v=\left(S-\frac{1}{2}s\right)^2\mp\sqrt{D}(S-s),$$

$$\mathfrak{p}'u-\mathfrak{p}'v=(2S-s)\cdot(\mathfrak{p}u-\mathfrak{p}v).$$

Pour $u=v$, la vraie valeur de S est:

$$S=\frac{1}{2}\left[s+\frac{\mathfrak{p}''v}{\mathfrak{p}'v}\right];$$

donc une première solution de l'équation de Fermat est:

$$S=s-\frac{A^2}{B}, \quad P=-\frac{B}{A}\left(s+\frac{B^2-A^3}{AB}\right), \quad \sqrt{D}=s+\frac{2B^2-A^3}{AB};$$

les racines de l'équation correspondante du second degré sont:

$$X'=-\frac{B}{A}, \qquad X''=s+\frac{B^2-A^3}{AB}.$$

A l'argument $u=-2v$ correspond le même couple (X', X'').

A l'argument $u=-\frac{v}{2}$ correspond la solution sans intérêt $S=s$.

Aux valeurs $u=\frac{v}{2}$ et $u=-\frac{3v}{2}$ de l'argument correspondent la solution évidente $S=-\frac{B}{A}$, $P=0$.

Pour $u = 2v$:

$$S = \frac{A^2}{B} \cdot \frac{s - \frac{A^2}{B} + \frac{2B}{A} - \frac{B^3}{A^4}}{s - \frac{A^2}{B} + \frac{2B}{A}},$$

$$S - s = - \frac{\left(s + \frac{B}{A} - \frac{A^2}{B}\right)^2}{s + \frac{2B}{A} - \frac{A^2}{B}}, \quad \text{etc.}$$

9. — En général, *le problème d'homographie admet ainsi une infinité de solutions*, qui correspondent aux multiples entiers de l'argument w. Ainsi que vont le mettre en évidence les considérations du paragraphe suivant, l'équation présentement étudiée est équivalente à l'équation la plus générale ayant la solution donnée w. En général donc, il n'y a pas d'autre solution rationnelle que celle de la forme $u = n.w$, avec $v + 2w =$ période.

En général, v et w ne sont pas des parties aliquotes de période et il y a une infinité de solutions. Mais lorsque le rapport de v et d'une période est un nombre commensurable, les solutions données par $v = nw$ sont en nombre limité.

Cette circonstance se produit lorsque $B = 0$, car alors $p'v = 0$ (voir paragraphe 21). Il en est de même lorsque $A = 0$.

Pour $A = 0$,

$$12g_2 = s(s^3 + 24B), \qquad 8.27g_3 = 108B^2 - (s^3 + 18B)^2,$$

$$\Delta = - B^3(s^3 + 27B),$$

$$\wp v = \frac{s^2}{12}, \qquad \wp' v = - B, \qquad \wp'' v = - Bs,$$

$$\wp \frac{v}{2} = \wp 2v = \wp v;$$

$\wp 3w$ devient infini, et par suite:

$$w = \frac{2}{3} \varpi;$$

2ϖ étant une période. Deux arithmopoints seulement sont connus sur la cubique; ce sont des points d'inflexion.

10. — En dehors de ces cas relativement généraux $A = 0$ ou $B = 0$, on peut encore citer le cas

$$A = -1 , \quad B = 1 , \quad s = 3 ,$$

pour lequel

$$\mathfrak{p}w = \frac{13}{12} , \quad \mathfrak{p}'w = +2 , \quad \mathfrak{p}''w = 6 ,$$

$$\mathfrak{p}v = \frac{1}{12} , \quad \mathfrak{p}'v = -1 , \quad \mathfrak{p}''v = -1 ,$$

$$\mathfrak{p}3w = -\frac{11}{12} , \quad \mathfrak{p}'3w = 0 ,$$

$$\mathfrak{p}2v = \frac{1}{12} , \quad \mathfrak{p}'2v = 1 ;$$

$$v = \frac{2\varpi'}{3} ;$$

ici encore les arithmopoints de la cubique se réduisent aux points d'inflexion, à un sommet et aux points qui s'en déduisent par alignement : au total, cinq arithmopoints sur la cubique. C'est à cette circonstance particulière qu'est liée l'*inexistence d'arithmotriangles pseudoisoscèles.*

11. — Le problème d'homographie, qui vient d'être posé et résolu, dépend ainsi d'une équation de Fermat du type spécial pour lequel le polynome du quatrième degré a un zéro rationnel. L'argument $w = -\frac{v}{2}$ est tel que :

$$\mathfrak{p}w = \frac{s^2 - 4A}{12} , \quad \mathfrak{p}'w = -(As + B) \neq 0 , \quad \mathfrak{p}''w = s.\mathfrak{p}'w .$$

Réciproquement, soit l'équation la plus générale de Fermat pour laquelle se produise la circonstance spécifiée. Elle peut être caractérisée par l'ensemble des valeurs numériques de $\mathfrak{p}w$, $\mathfrak{p}'w$ et $\mathfrak{p}''w$. D'où successivement s, A et B :

$$s = \frac{\mathfrak{p}''w}{\mathfrak{p}'w} , \quad A = \frac{s^2}{4} - 3\mathfrak{p}w , \quad B = -(As + \mathfrak{p}'w)$$

par trois formules nettes de toute indétermination.

Par suite, *les équations de Fermat, pour un polynome du quatrième degré avec zéro rationnel, jouissent de cette nouvelle propriété* *de donner toujours lieu à une homographie entre le produit et la somme des racines d'équations du second degré.*

La valeur de $\wp' w$ doit essentiellement, être distincte de zéro.

12. — *Expression des résultats.* — Les considérations exposées dans la première partie de ce travail trouvent une application immédiate dans l'expression finale des résultats du problème d'homographie.

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} + s\right),$$

$$S - s = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} - s\right) = \frac{\sigma 2w}{\sigma^2 w} \cdot \frac{\sigma^2(u - w)}{\sigma(u - 2w) \cdot \sigma u},$$

car S — s n'est autre ici que la fonction x des paragraphes 5 et 6; le polynome en S admet s pour zéro rationnel:

$$S - s = x .$$

Il vient ensuite:

$$\sqrt{D}(S - s) = \wp(u + v) - \wp u ;$$

les racines X′ et X″ de l'équation du second dergé sont alors:

$$(S - s) . X' = \wp u - \wp w ,$$

$$(S - s) . X'' = \wp(u + v) - \wp w ;$$

$$X' = \frac{1}{\sigma 2w} \cdot \frac{\sigma u . \sigma(3w - u)}{\sigma(u - w) . \sigma(u - 2w)},$$

$$X'' = \frac{1}{\sigma 2w} \cdot \frac{\sigma(u + w) . \sigma(u - 2w)}{\sigma u . \sigma(w - u)},$$

$$\frac{X'}{X''} = \frac{\sigma(u + w)}{\sigma(u - 3w)} \cdot \frac{\sigma^2(u - 2w)}{\sigma^2 u} .$$

$$P = \wp 2w - \wp(u - w) = \frac{\sigma(u - 3w) . \sigma(u + w)}{\sigma^2 2w . \sigma^2(u - w)} .$$

On peut encore écrire:

$$X' = \gamma \frac{\wp\left(u - \frac{3}{2}w\right) - \wp\left(\frac{3}{2}w\right)}{\wp\left(u - \frac{3}{2}w\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)},$$

$$X'' = \gamma \frac{\wp\left(u - \frac{w}{2}\right) - \wp\left(\frac{3}{2}w\right)}{\wp\left(u - \frac{w}{2}\right) - \wp\left(\frac{w}{2}\right)} ;$$

la constante γ a pour expression:

$$\gamma = -\frac{1}{\sigma(2w)}\cdot\left[\frac{\sigma\left(\frac{3}{2}w\right)}{\sigma\left(\frac{1}{2}w\right)}\right]^2 .$$

En général $\mathfrak{p}\left(\frac{3}{2}w\right)$ et $\mathfrak{p}\frac{w}{2}$ sont irrationnelles; cette irrationnalité n'est introduite qu'en apparence dans les expressions de X′ et X″.

Considérées comme fonction de u, les racines X′ et X″ satisfont à l'identité

$$X''(u) \equiv X'(u+w) \ ;$$

c'est la même fonction avec des arguments différents de la constante w (propriété caractéristique des relations doublement quadratiques et symétriques).

13. — *Equation avec* P *pour inconnue.* — Comme $S - s = x$, la méthode du paragraphe 8 revient à prendre pour inconnue une quantité inversement proportionnelle à $S - s$; mais ici:

$$S = \frac{Ps + B}{P - A}, \qquad S - s = \frac{As + B}{P - A} .$$

en prenant P pour inconnue principale, on est assuré *a priori* d'avoir à rendre carré un polynome cubique. En fait, l'équation en P est:

$$D(P - A)^2 = (Ps + B)^2 - 4P(P - A)^2 ,$$

$$-4P^3 + (s^2 + 8A)P^2 + 2(Bs - 2A^2)P + B^2 = \square .$$

Ce qui conduit aux formules suivantes:

$$P = \mathfrak{p}v - \mathfrak{p}t , \qquad P - A = \mathfrak{p}w - \mathfrak{p}t ,$$

$$S - s = \frac{\mathfrak{p}'w}{\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}w} ; \qquad \sqrt{D} = \frac{\mathfrak{p}'t}{\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}w} .$$

$$X' = \frac{1}{2}\cdot\frac{s(\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}v) + \mathfrak{p}'v - \mathfrak{p}'t}{\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}w} \equiv \frac{1}{2}\cdot\frac{-f(-t)}{\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}w} ,$$

$$X'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{s(\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}v) + \mathfrak{p}'v + \mathfrak{p}'t}{\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}w} \equiv \frac{1}{2}\cdot\frac{-f(t)}{\mathfrak{p}t - \mathfrak{p}w} ,$$

en introduisant la fonction $f(t)$ du paragraphe 5:

$$f(t) \equiv \wp' t - \wp' v - s(\wp t - \wp v) \ ;$$

d'où pour X′ et X″ les expressions en produits de sigma se réduisant à celles du paragraphe 12 par simple changement d'argument $u = t + w$.

14. — *Etude directe de la relation entre* X′ *et* X″. — Les racines X′, X″ sont liées par la relation

$$xy(x + y - s) = A(x + y) + B \ ,$$

représentative d'une cubique plane. La discussion précédente a mis en évidence l'existence d'arithmopoints sur cette cubique quels que soient A, B et s:

$$x = -\frac{B}{A}, \qquad y = s + \frac{B^2 - A^3}{AB},$$

$$x = -\frac{B}{A}, \qquad y = 0 \ , \ldots$$

et ceux qui en résultent par symétrie par rapport à l'axe $x = y$.

D'autre part, si on se donne x, l'équation en y est du second degré; de même l'équation en x pour une valeur donnée de y. Ainsi, de tout couple donné (x_1, y_1) représentatif d'un arithmopoint, il est possible de déduire immédiatement deux nouvelles solutions (x_1, y_2) et (x_2, y_1) et ainsi de suite dans les deux sens.

Ceci revient à partir d'un arithmopoint de cette cubique plane et à mener les parallèles à l'une et à l'autre des asymptotes $x = 0$, $y = 0$. C'est sous une forme élémentaire l'addition des arguments des fonctions elliptiques.

La cubique considérée peut-être représentée par les fonctions de Weierstrass au moyen des formules qui ont été données aux paragraphes 12 et 13, pour les expressions de X′ et X″.

Interprétation géométrique.

15. — Soient t, t' deux arithmopoints quelconques d'une arithmoconique (P) du plan des coordonnées. En désignant par S et P

la somme et le produit des paramètres t et t' de ces points, une relation quelconque entre S et P peut-être considérée comme l'équation tangentielle d'une courbe (Q) du plan, enveloppée par la corde tt'; et réciproquement.

L'ensemble de cette équation tangentielle et de celle, $S^2 - 4P = 0$, de la conique (P), représente les tangentes communes à (P) et à (Q); l'existence des solutions rationnelles pour ce système d'équations équivaut à la détermination rationnelle d'autant de tangentes communes.

Sans restreindre la généralité de la question, il est toujours possible de prendre pour (P) une parabole d'équations paramétriques $x = t^2$, $y = t$. La corde tt' de cette courbe a pour équation:

$$x - Sy + P = 0 ;$$

les coordonnées tangentielles de cette droite sont $u = 1$, $V = -S$, $W = P$.

Si, d'autre part, l'équation tangentielle d'une seconde conique (Q) est:

$$aU^2 + 2bUV + cV^2 + 2dUW + 2eVW + fW^2 = 0 ,$$

le problème de la détermination des cordes joignant deux arithmopoints de la parabole (P) et tangentes à la conique (Q) est réduit à l'équation

$$a - 2bS + cS^2 + 2dP - 2ePS + fP^2 = 0 .$$

La disparition de P^2 exige que la conique (Q) soit elle aussi une parabole ($f = 0$).

La disparition du terme en S^2 exige que la conique Q soit tangente à l'axe Ox de la parabole (P).

Pour que la relation entre P *et* S *soit homographique, il faut et il suffit que la conique* (Q) *soit une parabole tangente à l'axe de la parabole* (P).

Comme le coefficient e de PS ne saurait être nul sans décomposition d'une part de la parabole (Q) et sans dégénérescence d'autre part, de l'homographie, il sera pris égal à l'unité; les formules de correspondance sont:

$$A = -b\,, \qquad B = \frac{a}{2}\,, \qquad s = d\,, \qquad e = 1\,.$$

La parabole (Q) dépend de trois paramètres; son équation tangentielle est:

$$BU^2 - AUV + sUW + VW = 0\,. \qquad \text{(Q)}$$

L'équation ponctuelle s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation de la corde tt', le produit P par son expression homographique en S et en égalant à zéro le discriminant du polynome en S, du second degré, ainsi obtenu:

$$(x + sy + A)^2 = 4y(sx - B)\,, \qquad \text{(Q)}$$

ou encore

$$(x - sy + A)^2 + 4(As + B)y = 0\,;$$

cette parabole (Q) touche Ox au point $x = A$; l'autre tangente issue de O a pour équation $Ax + By = 0$: c'est une arithmocorde particulière de (P), qui représente la solution $S = -\frac{B}{A}$, $P = 0$.

La directrice a pour équation $y + sx = B$; les coordonnées du foyer sont:

$$x = \frac{Bs - A}{1 + s^2}\,, \qquad y = -\frac{As + B}{1 + s^2}\,.$$

Examen de cas spéciaux.

16. — *Cas où l'équation* D = 0 *a une seconde racine rationnelle.* — Soit $S = 2a$, la racine rationnelle (autre que $S = s$). Alors:

$$S^3 - sS^2 - 4AS - 4B \equiv (S - 2a)(S^2 - 2LS + 2M)\,;$$

a, L et M sont supposés donnés; soit $\delta = L^2 - 2M$ la quantité dont dépend la réalité des racines du facteur quadratique.

Les formules sont les suivantes. L'équation cubique $\wp' u = 0$ a une racine rationnelle e_1.

$$s = 2(a + \mathrm{L}) \ , \qquad \mathrm{A} = -\left(a\mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) , \qquad \mathrm{B} = a\mathrm{M} \ ;$$

$$e_1 = \wp\omega_1 = -\frac{2}{3}\left(a^2 + \frac{\mathrm{M} - \mathrm{L}^2}{2}\right) ,$$

$$g_2 = 3e_1^2 + \delta\mathrm{L}^2 \ . \qquad g_3 = e_1(e_1^2 - \delta\mathrm{L}^2) \ , \qquad \Delta = \delta\mathrm{L}^2(9e_1^2 - \delta\mathrm{L}^2)^2 \ .$$

$$\wp v = \frac{1}{3}(a^2 + \mathrm{L}^2 - \mathrm{M}) \ , \quad \wp' v = -a\mathrm{M} \ , \quad \wp'' v = 2a^2(\mathrm{L}^2 - \mathrm{M}) + \frac{\mathrm{M}^2}{2} \ ,$$

$$\wp\frac{v}{2} = \frac{1}{3}\left(a^2 + 3a\mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) , \qquad \wp'\frac{v}{2} = -2\mathrm{L}\left(a^2 + a\mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) ,$$

$$\wp''\frac{v}{2} = -s\,.\,\wp'\frac{v}{2} \ ;$$

$$\wp\alpha = \frac{1}{3}\left(a^2 - 3a\mathrm{L} + \mathrm{L}^2 + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) , \qquad \wp'\alpha = -2\mathrm{L}\left(a^2 - a\mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{2}\right) ,$$

$$\wp''\alpha = -s\,.\,\wp'\alpha \ .$$

α est l'argument associé à $\mathrm{S} = 2a$; sa valeur est $\alpha = \omega_1 - \frac{v}{2}$.

17. — *Cas où toutes les racines de l'équation* D = 0 *sont rationnelles*. Soient $2a$, $2b$, $2c$ les racines de l'équation en S:

$$\mathrm{S}^3 - s\mathrm{S}^2 - 4\mathrm{AS} - 4\mathrm{B} \ ;$$

les expressions de A, B, s sont alors:

$$s = 2(a + b + c) \ ,$$

$$\mathrm{A} = -(ab + bc + ca) \ , \qquad \mathrm{B} = 2abc \ .$$

D'où, pour les éléments elliptiques les expressions:

$$g_2 = \frac{4}{3}(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) > 0 \ ,$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(a^2 + b^2 - 2c^2)(b^2 + c^2 - 2a^2)(c^2 + a^2 - 2b^2) \ ,$$

$$\Delta = 16(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2 > 0 \ .$$

Les trois racines de $\wp' u = 0$ sont réelles et rationnelles:

$$e_1 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2) , \qquad e_2 = \frac{1}{3}(c^2 + a^2 - 2b^2) ,$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2c^2) ;$$

dans l'ordre $e_1 > e_2 > e_3$, pour $a^2 < b^2 < c^2$.

$$\wp v = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) , \quad \wp' v = -2abc , \quad \wp'' v = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) ;$$

$$\wp \frac{v}{2} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca , \quad \wp' \frac{v}{2} = -2(a+b)(b+c)(c+a) .$$

Si α, β, γ sont les valeurs des arguments associés à $S = 2a$, $2b$ et $2c$, les formules générales de correspondance donnent:

$$\wp\alpha = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + bc - a(b+c) , \quad \wp'\alpha = -2(b+c)(a-b)(a-c) ,$$

etc.

Et, par suite:

$$\alpha = \omega_1 - \frac{v}{2} , \qquad \beta = \omega_2 - \frac{v}{2} , \qquad \gamma = \omega_3 - \frac{v}{2} ,$$

$$e_1 = \wp\omega_1 , \qquad e_2 = \wp\omega_2 , \qquad e_3 = \wp\omega_3 .$$

Pour $u = \omega_1$, il vient:

$$S = a + b + c - \frac{bc}{a} , \quad P = ab + ac - bc , \quad \pm\sqrt{D} = \frac{(a-b)(a-c)}{a} ,$$

$$X' = a , \qquad X'' = b + c - \frac{bc}{a} .$$

18. — *Interprétations géométriques.* — Les formules ci-dessus assurent l'existence de trois tangentes rationnelles, communes aux paraboles (P) et (Q) du paragraphe 15:

$$U = 1 , \quad V = -2a , \quad W = a^2 , \quad \text{etc.} \dots$$

Cette question peut encore être traitée en rapportant les deux paraboles au triangle de référence formé par les trois tangentes communes. Sans restriction de généralité, la parabole (P) peut être représentée par les équations tangentielle et ponctuelle:

$$\frac{1}{U} + \frac{1}{V} + \frac{1}{W} = 0 , \qquad \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 0 .$$

Si t est le paramètre du point courant et de la tangente associée, on pourra prendre la représentation paramétrique suivante en coordonnées homogènes:

$$U = \frac{1}{1 + \sigma + t}, \quad V = \frac{1}{1 - \sigma - t}, \quad W = -\frac{1}{2};$$

$$x = \frac{1}{U^2} = (t + \sigma + 1)^2, \quad y = \frac{1}{V^2} = (t + \sigma - 1)^2, \quad z = \frac{1}{W^2} = 4;$$

les coordonnées tangentielles de la corde tt' sont alors:

$$U = 2 - (S + 2\sigma), \quad V = 2 + (S + 2\sigma),$$
$$W = P + \sigma S + \sigma^2 - 1;$$

où $S = t + t'$, $P = tt'$. Si maintenant la conique (Q) est représentée par l'équation

$$\frac{L}{U} + \frac{M}{V} = \frac{1}{W},$$

les constantes σ, L et M étant liées par la relation

$$\sigma(M - L) = 1,$$

l'homographie définie entre P et S par les tangentes de (Q) a pour coefficients:

$$A = 1 + \sigma^2 + 2\sigma^2(L + M),$$
$$B = 2\sigma(\sigma^2 - 1)(L + M + 1),$$
$$s = 2\sigma(L + M - 1).$$

Les formules d'équivalence entre les deux modes de représentation sont:

$$a = 1 - \sigma,$$
$$b = -1 - \sigma,$$
$$c = \sigma(L + M + 1),$$

le paramètre d'homogénéité étant choisi de telle manière que $a - b = 2$.

19. — *Cas de la cubique équianharmonique.* — En prenant A et s arbitraires, $s \neq 0$, la formule

$$24(Bs - 2A^2) + (s^2 + 8A)^2 = 0,$$

permet de donner à B une valeur rationnelle assurant l'existence d'un cas équianharmonique ($g_2 = 0$). Ces formules peuvent être écrites sous la forme suivante, avec un paramètre rationnel t:

$$A = \frac{12t - s^2}{8}, \qquad B = \frac{s^4 - 24ts^2 - 48t^2}{32s},$$

$$g_2 = 0, \quad g_3 = 4t^3 - B^2 = -\frac{(s^2 - 4t)^3(s^2 - 36t)}{2^{10}s^2};$$

$$\wp v = t, \qquad \wp' v = -B, \qquad \wp'' v = 6t^2.$$

$$\wp\frac{v}{2} = \frac{s^2 - 4t}{8}, \qquad \wp'\frac{v}{2} = -\frac{3}{32}\cdot\frac{(s^2 - 4t)^2}{s}.$$

20. — *Cas de la cubique harmonique.* — L'invariant g_3 est nul, lorsque se trouve remplie une condition entre les paramètres, qui est du second degré en B ; il en résulte que $\frac{s^2 + 8A}{12}$ est un carré. Il faut donc prendre:

$$\wp v = \square = \lambda^2,$$

λ étant un nombre rationnel. D'où découlent les formules suivantes de représentation générale du cas où la cubique de Weierstrass est harmonique:

$$A = \frac{12\lambda^2 - s^2}{8}, \qquad B = \lambda\left(\lambda^2 - \lambda s - \frac{s^2}{4}\right),$$

$$g_2 = \frac{1}{16}(s + 2\lambda)^2(s + 6\lambda)(2\lambda - s), \qquad g_3 = 0.$$

$$\wp v = \lambda^2, \qquad \wp' v = -B,$$

$$\wp\frac{v}{2} = \frac{s^2 - 4\lambda^2}{8}, \qquad \wp'\frac{v}{2} = -\frac{1}{8}(s + 2\lambda)^2 . (s - 2\lambda);$$

Si la racine nulle e_1 est $\wp\omega_1 = 0$, on a une nouvelle solution simple:

$$\wp\left(\frac{v}{2} + \omega_1\right) = \frac{1}{8}(s + 6\lambda)(s + 2\lambda), \quad \wp'\left(\frac{v}{2} + \omega_1\right) = (s + 2\lambda) . \wp\left(\frac{v}{2} + \omega_1\right).$$

LE CAS B = 0 ET LES TRIANGLES HÉRONIENS.

21. — Pour B = 0, c'est-à-dire pour la relation

$$\frac{A}{P} + \frac{s}{S} = 1 \ ,$$

l'équation D = 0 est satisfaite pour S = 0 et P = 0. Par suite, quels que soient A et s, l'équation cubique a la racine rationnelle

$$e_1 = \wp\omega_1 = \wp\nu = \frac{s^2 + 8A}{12} \ , \qquad \nu = \omega_1 + \text{période} \ .$$

Il en résulte les formules suivantes:

$$g_2 = 4(3e_1^2 - A^2) \ ,$$
$$g_3 = 4e_1(A^2 - 2e_1^2) \ ,$$
$$\Delta = 16A^4(ge_1^2 - 4A^2) \ ;$$

$$\wp'^2u = 4(\wp u - e_1) \cdot [\wp^2u + e_1\wp u + A^2 - 2e_1^2] \ ;$$

$$(e_2 - e_3)^2 = 9e_1^2 - 4A^2 = \frac{s^2}{16}(s^2 + 16A) \ .$$

Lorsque $s^2 + 16A$ est positif, les trois racines existent et e_1 est la plus grande des racines:

$$e_1 > e_2 > e_3$$
$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = A^2 \ ;$$

cette dernière expression se présentant comme un carré parfait, les valeurs de $\wp u$, pour $\frac{\omega_1}{2}$ et $\frac{\omega_1}{2}$ + une demi-période, sont rationnelles. On obtient ainsi:

$$\wp\psi_1 = \frac{s^2 - 4A}{12} \ , \qquad \wp'\psi_1 = \pm As \ , \qquad \wp''\psi_1 = -As^2 \ ,$$

$$\wp\psi_2 = \frac{s^2 + 20A}{12} \ , \qquad \wp'\psi_2 = \pm A\sqrt{s^2 + 16A} \ , \qquad \wp''\psi_2 = A(s^2 + 16A) \ ;$$

$2\psi_1$ et $2\psi_2$ étant égaux à ω_1 (à une demi-période près); au signe près ψ_1 est d'ailleurs égal à $\frac{\nu}{2} + \omega'$.

22. — Les trois racines sont rationnelles, lorsque $s^2 + 16A$ est un carré; alors ψ_2 est l'argument d'un arithmopoint de la cubique.

Soit, dans ce cas, $A = \frac{\lambda^2 - s^2}{16}$, $B = 0$. En fonction des paramètres rationnels s et λ, il vient:

$$3.64.g_2 = \lambda^4 + \lambda^2 s^2 + s^4 ,$$
$$27.2^9.g_3 = (\lambda^2 + s^2)(\lambda^4 - 34\lambda^2 s^2 + s^4) ,$$
$$2^{16}\Delta = \lambda^2 s^2 (\lambda^2 - s^2)^2 .$$

$$24e_1 = \lambda^2 + s^2 > 0 ,$$
$$48e_2 = -(\lambda^2 - 6\lambda s + s^2) < 0 ,$$
$$48e_3 = -(\lambda^2 + 6\lambda s + s^2) < 0 .$$

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{16}(\lambda - s)^2 , \quad e_1 - e_3 = \frac{1}{16}(\lambda + s)^2 , \quad e_2 - e_3 = \frac{1}{4}\lambda s ;$$

on peut toujours supposer λ positif, ce qui assure l'ordre des racines $e_1 > e_2 > e_3$.

En posant $s = 2(b + c)$, $\lambda = 2(c - b)$, $c > b$, ces formules rentrent comme cas particulier dans celles qui ont été données plus haut (paragraphe 17); a est ici égal à zéro:

$$A = -bc , \quad B = 0 , \quad s = 2(b + c) ,$$

$$g_2 = \frac{4}{3}(b^4 - b^2c^2 + c^4) , \quad g_3 = \frac{4}{27}(b^2 + c^2)(b^2 - 2c^2)(c^2 - 2b^2) ,$$

$$\Delta = 16b^4c^4(b^2 - c^2)^2 ,$$

$$e_1 = \frac{b^2 + c^2}{3} , \quad e_2 = \frac{c^2 - 2b^2}{3} , \quad e_3 = \frac{b^2 - 2c^2}{3} ,$$

$$e_1 - e_2 = b^2 , \quad e_1 - e_3 = c^2 , \quad e_2 - e_3 = c^2 - b^2 .$$

$$v = \omega_1 , \quad \wp v = e_1 , \quad \wp' v = 0 , \quad \wp'' v = 2b^2c^2 ,$$

$$\alpha = \frac{v}{2} , \quad \wp\frac{v}{2} = \frac{b^2 + 3bc + c^2}{3} , \quad \wp'\frac{v}{2} = -2bc(b + c) ,$$

$$\wp\beta = \frac{b^2 - 3bc + c^2}{3} , \quad \wp'\beta = 2bc(c - b) ,$$

$$\gamma = -\beta ;$$

aux arguments α, β, γ correspondent les racines $S = 0, 2b$ et $2c$ de l'équation $D = 0$; à $u = \omega_1$ correspond une valeur infinie de S. A $u = \omega_2$ et ω_3 correspond: $S = b + c$, $P = bc$, $X' = b$, $X'' = c$.

Le cas de $B = 0$, avec $s = 2$ et A carré, présente cette particularité intéressante de représenter la solution du problème suivant : *détermination de tous les triangles héroniens ayant un côté donné et une aire imposée.* J'étudierai la question prochainement.

Cas élémentaire de dégénérescence des fonctions elliptiques.

23. — L'expression du discriminant Δ des fonctions elliptiques, abstraction faite du facteur double $As + B$, qui ne saurait être nul sans dégénérescence de l'homographie, se présente sous forme d'un polynome du second degré seulement par rapport au paramètre B. Les deux autres paramètres A et s étant supposés donnés, rationnels et quelconques, l'équation $\Delta = 0$ n'a des racines rationnelles en B que si $s^2 + 12$ A est un carré. En introduisant un nouveau paramètre rationnel et arbitraire, ω, cette dernière condition est satisfaite de la manière la plus générale en prenant :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} ;$$

d'où l'expression correspondante du discriminant :

$$\Delta = -27(As + B)^2(B - B_1)(B - B_2) ,$$

avec :

$$4.27B_1 = s^3 - 3\omega^2 s - 2\omega^3 = (s + \omega)^2.(s - 2\omega) ,$$

$$4.27B_2 = s^3 - 3\omega^2 s + 2\omega^3 = (s - \omega)^2.(s + 2\omega) ;$$

$$27(B_2 - B_1) = \omega^3 .$$

Le changement de signe sur ω produit l'échange des valeurs de B_1 et B_2; en supposant que ω peut prendre toutes les valeurs rationnelles et algébriques, le discriminant Δ s'annule donc lorsque les coefficients A et B sont de la forme générale suivante :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} , \qquad B = \frac{1}{108}(s - \omega)^2.(s + 2\omega) ,$$

alors:

$$108 g_2 = \omega^2(\omega + 2s)^2 ,$$
$$8.3^6 g_3 = - \omega^3(\omega + 2s)^3 ,$$
$$\Delta = 0$$

$$As + B = \frac{1}{54}(\omega - s)(\omega + 2s)^2 ,$$

$$Bs - 2A^2 = - \frac{1}{8.27}(\omega - s)^2.(s^2 + 2\omega s + 3\omega^2) .$$

$$s^2 + 8A = \frac{s^2 + 2\omega^2}{3} , \qquad \wp v = \frac{s^2 + 2\omega^2}{36} .$$

$$\wp'^2 u = 4\left[\wp u - \frac{\omega(\omega + 2s)}{36}\right]^2 . \left[\wp u + \frac{\omega(\omega + 2s)}{18}\right] .$$

La solution élémentaire, correspondant à ce cas de dégénérescence des fonctions elliptiques, est donc avec un paramètre ψ, rationnel et quelconque:

$$\wp u = \frac{1}{36}[\psi^2 - 2\omega(\omega + 2s)] ,$$

$$\wp' u = \frac{1}{108}[\psi^2 - 3\omega(\omega + 2s)]\psi .$$

$$S - s = \frac{(\psi - 2s - \omega)^2}{6(\psi - s - 2\omega)} , \qquad S = \frac{(\psi + s - \omega)^2 - 3s(s + 2\omega)}{6(\psi - s - 2\omega)} ;$$

$$AS + B = \frac{\omega^2 - s^2}{72} . \frac{\psi + \omega + 2s}{\psi - s - 2\omega} . \left[\psi - \frac{(\omega + 2s)(s + 5\omega)}{3(\omega + s)}\right] ;$$

$$P = \frac{\omega^2 - s^2}{12} . \frac{\psi + \omega + 2s}{(\psi - \omega - 2s)^2}\left[\psi - \frac{(\omega + 2s)(s + 5\omega)}{3(\omega + s)}\right] ;$$

$$\pm \sqrt{D} = \frac{1}{6}(\psi - 3\omega) . \frac{\psi^2 - 3\omega(\omega + 2s)}{(\psi - s - 2\omega)(\psi - \omega - 2s)} .$$

Les racines X′ et X″ de l'équation du second degré

$$X^2 - SX + P = 0$$

sont ensuite:

$$X' = \frac{1}{6} . \frac{(\psi - s - 2\omega)(\psi + \omega + 2s)}{\psi - \omega - 2s} ,$$

$$X'' = \frac{\omega^2 - s^2}{2} . \frac{\psi - \dfrac{(\omega + 2s)(s + 5\omega)}{3(\omega + s)}}{(\psi - s - 2\omega)(\psi - \omega - 2s)} . \qquad (\omega + s \neq 0)$$

Pour $\omega + s = 0$,

$$A = 0\ ,\quad B = -\frac{s^3}{27}\ ,$$

$$108 g_2 = s^4 \qquad 8.3^6 g_3 = s^6\ , \qquad \Delta = 0\ ,$$

$$S - s = \frac{1}{6}\,\frac{(\psi - s)^2}{\psi + s}\ ,$$

$$X' = \frac{1}{6}\cdot\frac{(\psi + s)^2}{\psi - s}\ , \qquad X'' = \frac{4}{3}\cdot s^3\cdot\frac{1}{\psi^2 - s^2}\ .$$

Telles sont, dans le cas élémentaire, les expressions générales des racines d'une équation du second degré, supposées rationnelles et telles que leur somme et leur produit soient liés homographiquement. Ces expressions contiennent trois paramètres quelconques: deux d'entre eux, s et ω sont caractéristiques de la fonction homographique. Pour une telle relation supposée imposée, il y a donc une infinité d'équations du second degré (toujours dans le cas élémentaire de dégénérescence des fonctions elliptiques) qui répondent à la question, sous la condition que les coefficients A, B, s de la fonction homographique satisfont à la condition $\Delta = 0$; la solution dépend alors du paramètre arbitraire ψ.

24. — Indépendamment de la considération des fonctions elliptiques, le cas élémentaire peut être traité de la manière suivante, à partir de l'équation de Fermat

$$(S - s)\,[S^2(S - s) - 4AS - 4B] = \square\ .$$

Le polynome du quatrième degré en S a pour racine s et celle-ci est nécessairement simple, puisque l'expression $As + B$ ne saurait être nulle. Si donc le polynome du quatrième degré a une racine double, cette racine provient du facteur cubique

$$S^3 - sS^2 - 4AS - 4B = 0\ ;$$

elle est donc racine de l'équation du second degré, dérivée de l'équation cubique, ce qui exige que $s^2 + 12A$ soit un carré parfait:

$$s^2 + 12A = \omega^2\ ;$$

la racine double s' est donc de la forme $s_1' = \frac{s - \omega}{3}$; la racine simple s_1 du facteur cubique est $s_1 = s - s'_1 = \frac{s + 2\omega}{3}$. Les expressions qui en résultent pour A et B sont:

$$A = -\frac{(s - s_1)(s + 3s_1)}{16}, \qquad B = \frac{1}{4} s_1 s_1'^2 = \frac{1}{16} s_1 (s - s_1)^2 ;$$

elles conduisent, en s et ω, aux expressions précédemment trouvées.

Alors:

$$D = \frac{S - s_1}{S - s}(S - s_1')^2 ,$$

et le produit,

$$(S - s).(S - s_1) = \square ,$$

doit être carré parfait. La question est réduite à un problème bien connu d'analyse indéterminée du second degré seulement. La solution générale est en fonction d'un paramètre arbitraire λ:

$$S = \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4} s s_1}{\lambda - \frac{s + s_1}{4}} ,$$

$$S - s = \frac{\left(\lambda - \frac{s}{2}\right)^2}{\lambda - \frac{s + s_1}{4}}, \qquad S - s_1 = \frac{\left(\lambda - \frac{s_1}{2}\right)^2}{\lambda - \frac{s + s_1}{4}} .$$

$$\pm \sqrt{D} = \frac{\left(\lambda - \frac{s - s_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}(s - s_1)(s + 3s_1)}{\lambda - \frac{s + s_1}{4}} \cdot \frac{\lambda - \frac{s_1}{2}}{\lambda - \frac{s}{2}} ;$$

et, finalement, ces formules sont équivalentes à celles obtenues par dégénérescence des résultats généraux sous la seule condition de poser:

$$\lambda = \frac{\psi + s - \omega}{6} .$$

25. — *Solutions remarquables dans le cas de dégénérescence.*

I. Solution $\psi = 3\omega$.

$$S = \frac{s + 2\omega}{3}, \qquad P = \frac{(s + 2\omega)^2}{36}, \qquad D = 0 ;$$

$$X' = X'' = \frac{s + 2\omega}{6}.$$

II. Solution $\psi = -(\omega + 2s)$.

$$S = -\sqrt{D} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(s + 2\omega)(s - \omega)}{\omega + s}, \qquad P = 0 ;$$

$$X' = 0, \qquad X'' = S.$$

III. Solution $\psi = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\omega + 2s)(s + 5\omega)}{\omega + s}$.

$$S = \sqrt{D} = -\frac{1}{9} \frac{(s + 2\omega).(s - \omega)}{s + \omega}, \qquad P = 0 ;$$

$$X' = S, \qquad X'' = 0.$$

IV. Le discriminant D de l'équation du second degré en X n'est, dans le cas général, nul que pour $\psi = 3\omega$ (solution I ci-dessus). Mais si l'expression $\omega(\omega + 2s)$ est triple d'un carré, D est nul pour deux nouvelles valeurs particulières de ψ.

A un facteur près, il suffit de prendre

$$\omega = 3, \qquad s = 2\sigma^2 + 2\sigma - 1, \qquad \psi = \pm 3(1 + 2\sigma).$$

A ces deux valeurs de ψ correspondent les mêmes solutions:

$$X' = X'' = \frac{1}{3}(\sigma - 1)(\sigma + 2).$$

$$A = -\frac{1}{3}(\sigma - 1)(\sigma + 2)(\sigma^2 + \sigma + 1),$$

$$B = \frac{1}{27}(\sigma - 1)^2(\sigma + 2)^2(2\sigma^2 + 2\sigma + 5),$$

$$S - s = -\frac{1}{3}(2\sigma + 1)^2. \qquad AS + B = -\frac{1}{27}(\sigma - 1)^2(\sigma + 2)^2(2\sigma + 1)^3.$$

V. La somme S ne pourrait, en général, être nulle pour une valeur rationnelle de ψ. Pour que cette circonstance se produise il faut que $s(s + 2\omega)$ soit triple d'un carré.

En prenant, à un facteur près,

$$s = 3 , \qquad \omega = 2\sigma^2 + 2\sigma - 1 ,$$

on obtient

$$\psi_1 = 2\sigma^2 + 8\sigma - 1 \qquad \text{et} \qquad \psi_2 = 2\sigma^2 - 4\sigma - 7 .$$

A la solution ψ_1 correspondent les expressions suivantes:

$$X'' = - X' = \frac{1}{9}(\sigma - 1)(\sigma + 2)(2\sigma + 1) ,$$

$$A = \frac{1}{3}(\sigma - 1)(\sigma + 2)(\sigma^2 + \sigma + 1) ,$$

$$B = \frac{1}{27}(\sigma - 1)^2(\sigma + 2)^2(2\sigma + 1)^2 .$$

$$S = 0 , \qquad P = -\frac{B}{3} .$$

A la solution ψ_2 correspond un simple changement de signes sur X′ et X″:

$$X' = - X'' = \frac{1}{9}(\sigma - 1)(\sigma + 2)(2\sigma + 1) .$$

Après cette étude générale des équations de Fermat, pour un polynome ayant au moins un zéro rationnel, il reste à appliquer les formules qui viennent d'être établies à l'examen d'un certain nombre d'applications géométriques: triangles héroniens du paragraphe 22, triangles pseudo isocèles (paragraphe 10), etc... Je reviendrai sur ces diverses questions très prochainement.

Août 1927.