



Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

correspondant: c'est du reste ce groupe qui donne en quelque sorte la mesure de son homogénéité. L'espace parfaitement homogène est celui dont le groupe fondamental est le groupe infini de toutes les transformations continues: c'est l'espace de l'Analysis situs; les propriétés géométriques des figures y sont du reste relativement peu variées; elles deviennent déjà plus considérables si on prend pour groupe fondamental le groupe infini de toutes les transformations continues et dérivables. Dans un espace qui n'aurait aucune espèce d'homogénéité, c'est-à-dire dont le groupe fondamental se réduirait à la transformation identique, il n'y aurait en revanche, au sens du programme d'Erlangen, aucune science du général; toute la Géométrie se réduirait à des faits particuliers, sans lien les uns avec les autres.

## II

En marge de la riche moisson de travaux géométriques suscitée par les idées de Klein, s'est développée entre 1867 et 1914 une théorie géométrique toute différente, issue de la célèbre Dissertation inaugurale de Riemann: « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie »<sup>1</sup>. Les points de départ des deux grands géomètres sont bien différents. Pour Klein la notion géométrique fondamentale est contenue dans l'axiome de l'égalité, interprété à la lumière de la notion de groupe. Pour Riemann, à une époque du reste où la théorie des groupes continus n'était pas fondée, la notion géométrique fondamentale est celle de longueur; mais, obéissant à la tendance générale de la Physique moderne et répugnant à l'idée de soumettre cette notion à des lois *a priori* faisant intervenir, dans chaque région de l'espace, l'espace tout entier, il suppose la longueur définie de proche en proche au moyen d'une forme différentielle, que, pour plus de simplicité, on peut supposer quadratique, mais *a priori* arbitraire. L'espace ordinaire se retrouve comme un cas tout à fait particulier des espaces plus généraux introduits par Riemann.

<sup>1</sup> La thèse inaugurale de Riemann fut soutenue sous ce titre le 10 juin 1854 devant la Faculté de Philosophie de Göttingen; elle est reproduite dans les *Gesamm. math. Werke* de Riemann (Leipzig, 1872, p. 254-269).

Il est clair que la Géométrie riemannienne, développée surtout en Allemagne et en Italie, ne rentre pas du tout dans le cadre du programme d'Erlangen, car une variété riemannienne n'admet en général aucune espèce d'homogénéité. On pourrait néanmoins essayer<sup>1</sup> de subordonner la Géométrie riemannienne à l'idée directrice de Klein en se servant d'un principe qui joue un rôle fondamental dans le programme d'Erlangen, à savoir *le principe d'adjonction*. La Géométrie de Riemann est en effet l'étude des invariants du groupe infini de toutes les transformations ponctuelles à  $n$  variables, auquel on a *adjoint* une forme différentielle quadratique déterminée. Mais raisonner ainsi serait détourner le principe d'adjonction de Klein de sa vraie signification. On sait en quoi il consiste. On peut déduire, par exemple, la Géométrie affine de la Géométrie projective en adjoignant à l'espace projectif un plan privilégié (le plan de l'infini). Cela veut dire deux choses: 1° que le groupe fondamental de la Géométrie affine est un sous-groupe du groupe projectif; 2° que ce sous-groupe est formé de toutes les transformations projectives qui laissent invariant le plan de l'infini. Rien de pareil dans la Géométrie riemannienne; les propriétés qu'elle étudie ne sont pas celles qui sont invariantes par les transformations qui conservent la forme différentielle quadratique adjointe, car en général il n'y a aucune transformation de cette nature. En poussant jusqu'au bout l'extension abusive faite du principe d'adjonction, on pourrait dire que tout problème mathématique rentre dans le cadre du programme d'Erlangen; il suffit d'adjoindre au groupe de toutes les transformations possibles les données du problème à résoudre.

A la vérité on pourrait se rapprocher des idées de Klein par les considérations suivantes. Soit  $G$  le groupe infini à  $\frac{n(n+3)}{2}$  variables  $x_i, g_{ij}$ , obtenu en adjoignant aux équations d'une transformation arbitraire portant sur les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , celles qui indiquent comment cette transformation transforme les composantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental. Le groupe  $G$  est le groupe fondamental d'une Géométrie de Klein, étudiant les

<sup>1</sup> Cf. J. A. SCHOUTEN, *Erlanger Programm und Uebertragungslehre* (Rend. Circ. mat. Palermo, t. 50, 1926, p. 1-28).

propriétés d'un espace  $E$  à  $\frac{n(n+3)}{2}$  dimensions. Toute variété riemannienne peut être regardée comme une variété  $X_n$  à  $n$  dimensions plongée dans cet espace et définie par les équations qui donnent les  $g_{ij}$  en fonctions des  $x$ . Mais d'abord la Géométrie riemannienne correspondante n'est pas en toute rigueur l'étude des propriétés de la variété  $X_n$  dans ses relations avec l'espace ambiant, et, le serait-elle, elle n'en constituerait pas plus une Géométrie au sens de Klein que l'étude d'une surface particulière plongée dans l'espace euclidien, la surface des ondes, par exemple, n'en constitue une.

### III

La Relativité généralisée jeta dans la Physique et la Philosophie l'antagonisme qui existait entre les deux principes directeurs de la Géométrie, celui de Riemann et celui de Klein. Les espaces-temps de la mécanique classique et de la relativité restreinte sont du type de Klein, celui de la Relativité généralisée est du type de Riemann. Ce fait même que presque tous les phénomènes étudiés par la science depuis de nombreux siècles pouvaient s'expliquer aussi bien en se plaçant à l'un des points de vue qu'à l'autre était hautement significatif et suggérait malgré tout la possibilité d'une synthèse englobant les deux principes antagonistes.

La découverte par Levi-Civita<sup>1</sup> en 1917 du transport par parallélisme dans un espace de Riemann orienta les esprits vers une nouvelle direction. C'est en généralisant la notion du parallélisme de Levi-Civita d'une part, en poussant d'autre part à ses dernières conséquences l'idée directrice de Riemann par l'affirmation de la relativité de la longueur, que Weyl<sup>2</sup> arriva à la conception d'espaces métriques plus généraux que ceux de Riemann. Les géomètres furent surtout frappés par la fécondité de la notion du transport parallèle et on pensa être arrivé ainsi au principe constructeur de la Géométrie différentielle générale.

<sup>1</sup> T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 42, 1917, p. 173-205).

<sup>2</sup> H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 3<sup>te</sup> Auflage (Berlin, Springer, 1922).