9. — Produits égaux (fig. 14).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

centre M′ *est le point milieu de la distance des centres* H *et* M *des cercles inscrit et circonscrit* (fig. 12 et 13).

Le triangle des pieds des hauteurs $A_1 B_1 C_1$ étant un triangle *quelconque*, la 11^{me} propriété est aussi applicable au triangle donné ABC.

9. — Produits égaux (fig. 14).

Théorème 1. — *Si des sommets du triangle des pieds des hauteurs on abaisse les perpendiculaires sur les côtés du triangle donné, les produits de trois perpendiculaires de même sens sont égaux* (fig. 14).

Démonstration.

$$A_1G = c_1 \sin\beta , \qquad A_1K = b_1 \sin\gamma ,$$
$$B_1I = a_1 \sin\gamma , \qquad C_1M = a_1 \sin\beta ,$$
$$C_1J = b_1 \sin\alpha , \qquad B_1L = c_1 \sin\alpha .$$

Par suite

$$\underline{A_1G \cdot B_1I \cdot C_1J = A_1K \cdot C_1M \cdot B_1L .} \tag{61}$$

Théorème 2. — *Le produit des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des distances de même sens des sommets du triangle des pieds des hauteurs aux côtés du triangle donné* (fig. 14):

$$\underline{AD \cdot BE \cdot CF = A_1G \cdot B_1I \cdot C_1J \left(= \frac{S_1^2}{r_1}\right) .} \tag{62}$$

Démonstration.

$$AD = c' \sin\gamma , \qquad A_1G = a'' \sin\gamma ,$$
$$BE = a' \sin\alpha , \qquad B_1I = b'' \sin\alpha ,$$
$$CF = b' \sin\beta , \qquad C_1J = c'' \sin\beta ,$$

d'où résulte

$$AD \cdot BE \cdot CF = a'b'c' (\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)$$

et

$$A_1G \cdot B_1I \cdot C_1J = a''b''c'' (\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma) .$$

Mais, d'après le théorème de Ceva

$$a'\,b'\,c' = a''\,b''\,c'' \;.$$

Donc

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = A_1G \,.\, B_1I \,.\, C_1J \,(= A_1K \,.\, C_1M \,.\, B_1L) \;.$$

THÉORÈME 3. — *Le produit des trois côtés du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit de trois segments non consécutifs déterminés par les hauteurs sur les côtés du triangle donné* (fig. 14):

$$\underline{a_1\,b_1\,c_1 = a'\,b'\,c' \,(= a''\,b''\,c'') \;.} \tag{63}$$

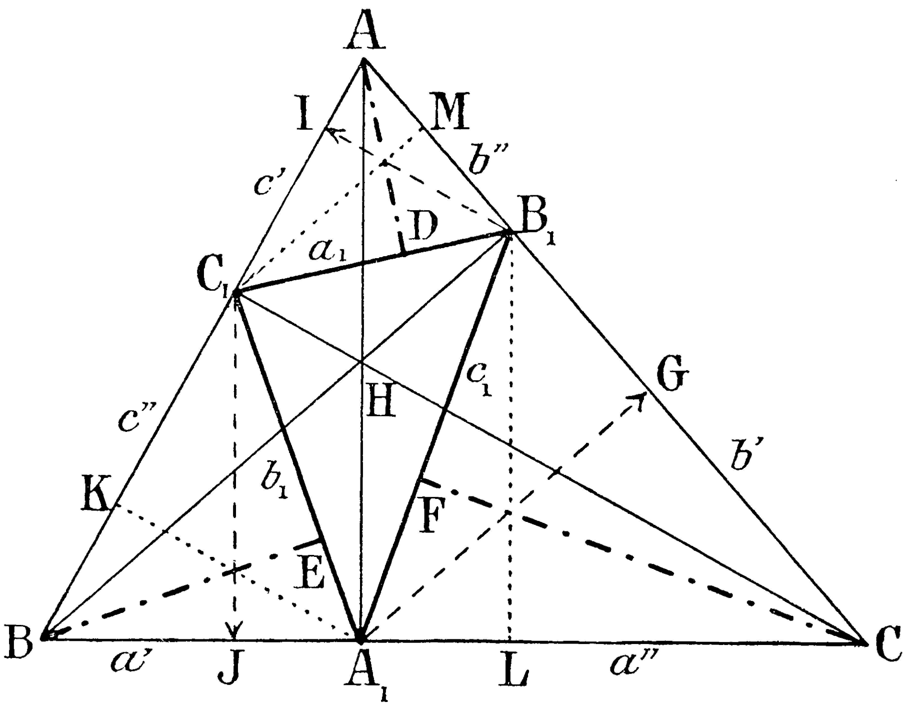

Fig. 14.

Démonstration.

$$a_1 = a \cos \alpha \;, \qquad a' = c \cos \beta \;,$$
$$b_1 = b \cos \beta \;, \qquad b' = a \cos \gamma \;,$$
$$c_1 = c \cos \gamma \;, \qquad c' = b \cos \alpha \;.$$

Par suite

$$a_1\,b_1\,c_1 = a'\,b'\,c' \;.$$

Remarque. — Ce théorème peut aussi être démontré au moyen des triangles semblables $AB_1\,C_1$, $BC_1\,A_1$, $CA_1\,B_1$.

THÉORÈME 4. — *Le produit de deux côtés du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des deux segments qui concourent avec eux* (fig. 14).

Démonstration.

$$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, BC_1A_1 :$$

$$a_1 : c' = c'' : b_1 ;$$

$$\left\{\begin{aligned} a_1 b_1 &= c'c'' , \\ b_1 c_1 &= a'a'' , \\ c_1 a_1 &= b'b'' . \end{aligned}\right. \tag{64}$$

Remarque. — En multipliant ces trois relations membre à membre, on serait conduit au théorème précédent.

10. — Droites se coupant en un même point.

1° Abaissons de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs:

Théorème 1. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle donné la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle donné.*

Démonstration. — Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a (fig. 15):

$$AO \perp AD ; \quad \text{mais} \quad AD \parallel a_1 .$$

Donc

$$AO \perp a_1 ; \quad \text{de même} \quad BO \perp b_1 \quad \text{et} \quad CO \perp c_1 .$$

Les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur a_1, b_1, c_1 passent donc par O.

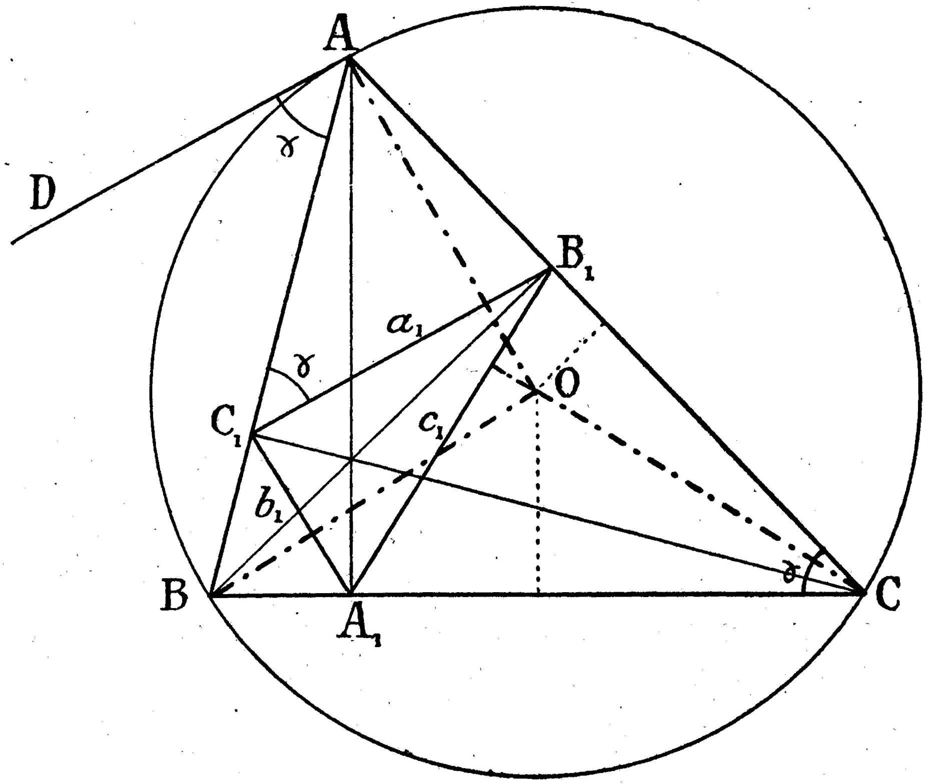

Fig. 15.