6. — Somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

6. — Somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs.

D'après le *théorème du cosinus*, on a (fig. 8):

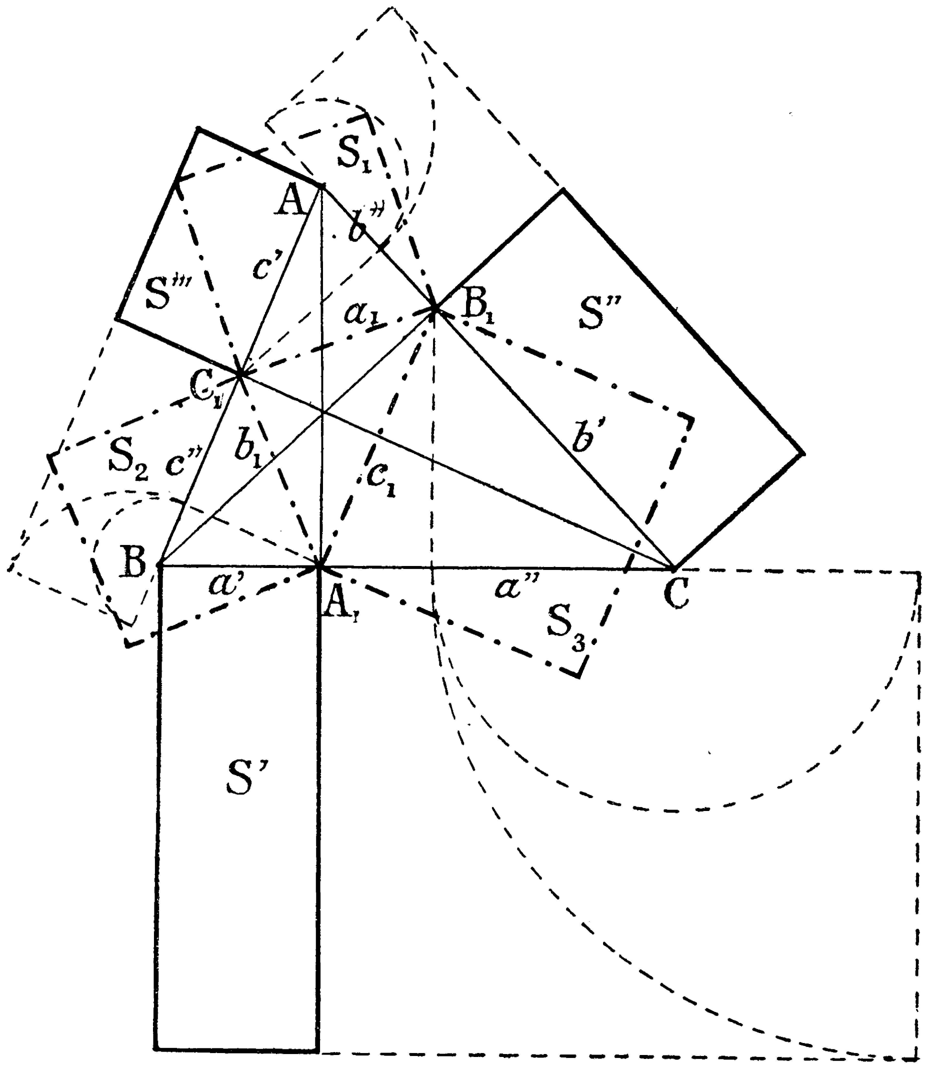

Fig. 8.

$\Delta\ AB_1C_1 \ldots \qquad a_1^2 = b''^2 + c'^2 - 2b''c' \cos \alpha$,

$\Delta\ BC_1A_1 \ldots \qquad b_1^2 = c''^2 + a'^2 - 2c''a' \cos \beta$,

$\Delta\ CA_1B_1 \ldots \qquad c_1^2 = a''^2 + b'^2 - 2a''b' \cos \gamma$,

d'où, en additionnant membre à membre

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + (a''^2 + b''^2 + c''^2)$$
$$- 2 \,.\, [b''c' \cos \alpha + c''a' \cos \beta + a''b' \cos \gamma] \,.$$

Or

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 \,.$$ [1] (44)

Par suite

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2(a'^2 + b'^2 + c'^2) - 2[b''c' \cos\alpha + c''a' \cos\beta + a''b' \cos\gamma] =$$
$$= 2[(a'^2 - c''a' \cos\beta) + (b'^2 - a''b' \cos\gamma) + (c'^2 - b''c' \cos\alpha)] \,.$$

Mais

$$\cos\beta = \frac{a'}{c}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{b'}{a}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{c'}{b}\,;$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2 . \left[\left(a'^2 \cos\beta \frac{c}{a'} - c''a' \cos\beta\right) + \left(b'^2 \cos\gamma \frac{a}{b'} - a''b' \cos\gamma\right) + \right.$$
$$\left. + \left(c'^2 \cos\alpha \frac{b}{c'} - b''c' \cos\alpha\right)\right] =$$
$$= 2 . [\cos\beta (a'c - a'c'') + \cos\gamma (b'a - b'a'') + \cos\alpha (c'b - c'b'')] =$$
$$= 2 . [\cos\beta\, a'(c - c'') + \cos\gamma\, b'(a - a'') + \cos\alpha\, c'(b - b'')] =$$
$$= 2 . [\cos\beta \,.\, a'c' + \cos\gamma \,.\, b'a' + \cos\alpha \,.\, c'b'] \,;$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2a'(b' \cos\gamma) + 2b'(c' \cos\alpha) + 2c'(a' \cos\beta) \,,$$
$$\underline{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a'(2b' \cos\gamma) + b'(2c' \cos\alpha) + c'(2a' \cos\beta)} \,, \qquad (45)$$

ou

$$S_1 + S_2 + S_3 = S' + S'' + S''' \,. \qquad (45')$$

Si l'on remplace, dans le cours des transformations, $(a'^2 + b'^2 + c'^2)$ par $(a''^2 + b''^2 + c''^2)$ et si l'on prend:

$$\cos\beta = \frac{c''}{a}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{a''}{b}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{b''}{c}\,,$$

on est conduit au résultat suivant:

$$\underline{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a''(2b'' \cos\gamma) + b''(2c'' \cos\alpha) + c''(2a'' \cos\beta)} \,. \qquad (46)$$

Les deux relations (45) et (46) donnent lieu au théorème suivant:

THÉORÈME. — *La somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs est égale à la somme de trois rectangles dont les bases sont trois segments non consécutifs du triangle donné et les hauteurs les doubles projections sur ceux-ci des segments non consécutifs suivants respectifs.*

---

[1] *Op. cité*, p. 32 (formule 4).

Remarque. — En appliquant ce théorème au cas où le triangle ABC donné est rectangle en A, on retrouve la relation connue:

$$h'^2 = a' . a'' .$$

7. — Propriétés résultant des relations (3) et (2).

1° *Chaque côté du triangle des pieds des hauteurs est égal à la projection du côté correspondant du triangle donné sur la tangente en l'une de ses extrémités au cercle circonscrit à ce dernier triangle.*

En effet (fig. 9):

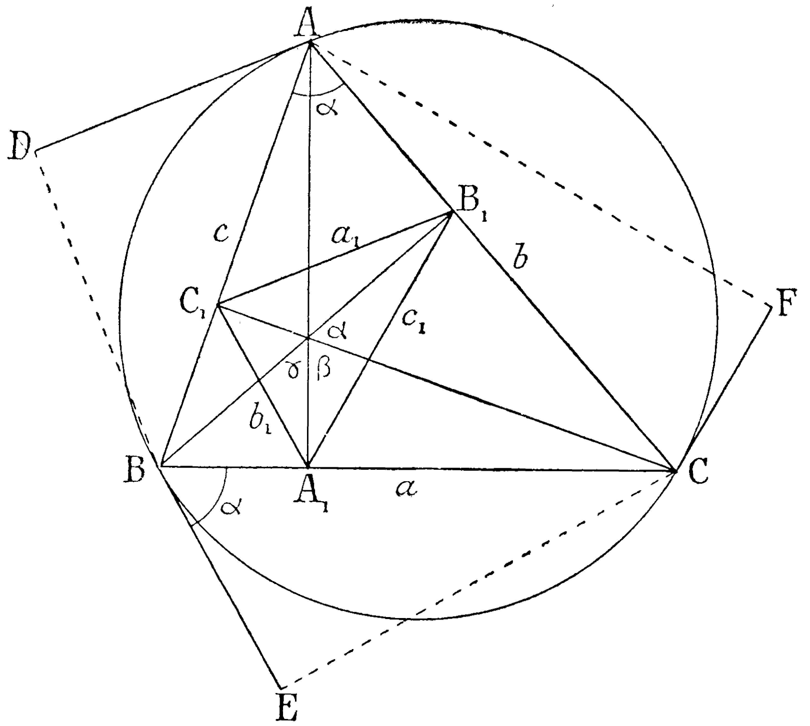

Fig. 9.

$$\left\{\begin{array}{l} BE = a \cos \alpha = a_1 , \\ CF = b \cos \beta = b_1 , \\ AD = c \cos \gamma = c_1 . \end{array}\right. \qquad (47)$$

2° *La projection de chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé est égale à la somme des deux côtés non-correspondants du triangle des pieds des hauteurs.*