

6. — Somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6. — Somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs.

D'après le *théorème du cosinus*, on a (fig. 8):

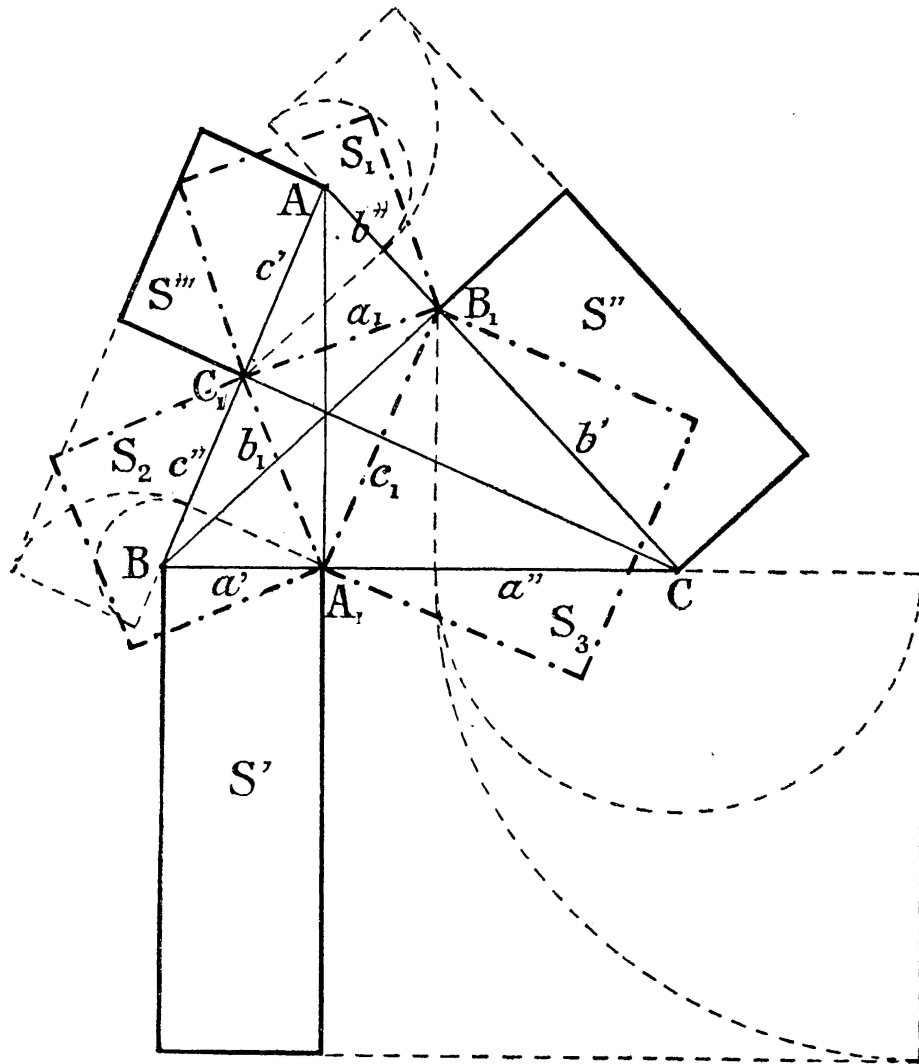


Fig. 8.

$$\Delta AB_1C_1 \dots \quad a_1^2 = b''^2 + c'^2 - 2b''c' \cos \alpha ,$$

$$\Delta BC_1A_1 \dots \quad b_1^2 = c''^2 + a'^2 - 2c''a' \cos \beta ,$$

$$\Delta CA_1B_1 \dots \quad c_1^2 = a''^2 + b'^2 - 2a''b' \cos \gamma ,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + (a''^2 + b''^2 + c''^2) - 2 \cdot [b''c' \cos \alpha + c''a' \cos \beta + a''b' \cos \gamma] .$$

Or

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 \quad (44)$$

Par suite

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 2(a'^2 + b'^2 + c'^2) - 2[b''c' \cos \alpha + c''a' \cos \beta + a''b' \cos \gamma] = \\ &= 2[(a'^2 - c''a' \cos \beta) + (b'^2 - a''b' \cos \gamma) + (c'^2 - b''c' \cos \alpha)]. \end{aligned}$$

Mais

$$\cos \beta = \frac{a'}{c}, \quad \cos \gamma = \frac{b'}{a}, \quad \cos \alpha = \frac{c'}{b};$$

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 2 \cdot \left[\left(a'^2 \cos \beta \frac{c}{a'} - c''a' \cos \beta \right) + \left(b'^2 \cos \gamma \frac{a}{b'} - a''b' \cos \gamma \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(c'^2 \cos \alpha \frac{b}{c'} - b''c' \cos \alpha \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot [\cos \beta (a'c - a'c'') + \cos \gamma (b'a - b'a'') + \cos \alpha (c'b - c'b'')] =$$

$$= 2 \cdot [\cos \beta a'(c - c'') + \cos \gamma b'(a - a'') + \cos \alpha c'(b - b'')] =$$

$$= 2 \cdot [\cos \beta \cdot a'c' + \cos \gamma \cdot b'a' + \cos \alpha \cdot c'b'];$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2a'(b' \cos \gamma) + 2b'(c' \cos \alpha) + 2c'(a' \cos \beta),$$

$$\underline{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a'(2b' \cos \gamma) + b'(2c' \cos \alpha) + c'(2a' \cos \beta)}, \quad (45)$$

ou

$$S_1 + S_2 + S_3 = S' + S'' + S''' \quad (45')$$

Si l'on remplace, dans le cours des transformations, $(a'^2 + b'^2 + c'^2)$ par $(a''^2 + b''^2 + c''^2)$ et si l'on prend:

$$\cos \beta = \frac{c''}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a''}{b}, \quad \cos \alpha = \frac{b''}{c},$$

on est conduit au résultat suivant:

$$\underline{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a''(2b'' \cos \gamma) + b''(2c'' \cos \alpha) + c''(2a'' \cos \beta)}. \quad (46)$$

Les deux relations (45) et (46) donnent lieu au théorème suivant:

THÉORÈME. — *La somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs est égale à la somme de trois rectangles dont les bases sont trois segments non consécutifs du triangle donné et les hauteurs les doubles projections sur ceux-ci des segments non consécutifs suivants respectifs.*

¹ Op. cité, p. 32 (formule 4).

Remarque. — En appliquant ce théorème au cas où le triangle ABC donné est rectangle en A, on retrouve la relation connue :

$$\underline{h'^2 = a' \cdot a''} .$$

7. — Propriétés résultant des relations (3) et (2).

1° Chaque côté du triangle des pieds des hauteurs est égal à la projection du côté correspondant du triangle donné sur la tangente en l'une de ses extrémités au cercle circonscrit à ce dernier triangle.

En effet (fig. 9) :

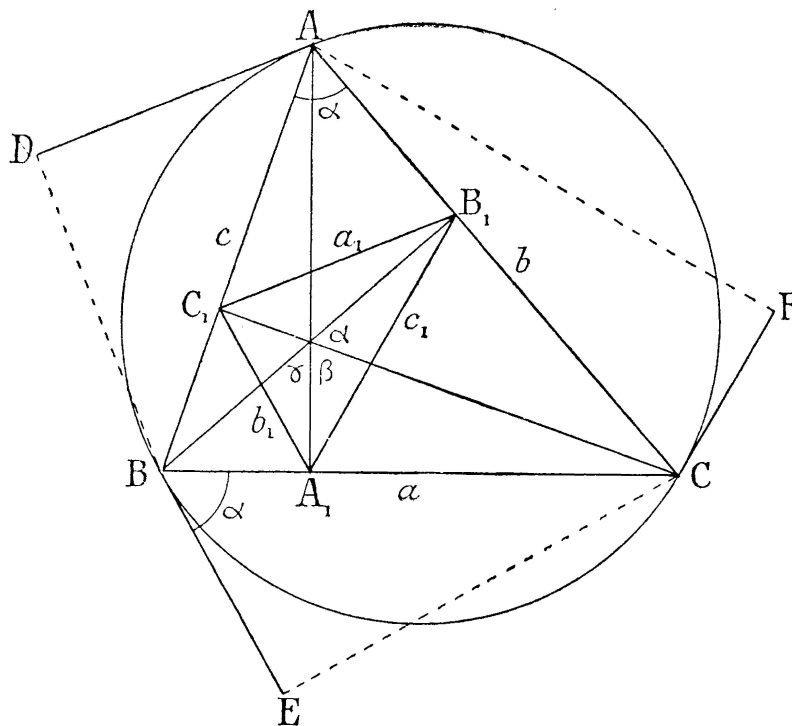


Fig. 9.

$$\left\{ \begin{array}{l} BE = a \cos \alpha = a_1 , \\ CF = b \cos \beta = b_1 , \\ AD = c \cos \gamma = c_1 . \end{array} \right. \quad (47)$$

2° La projection de chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé est égale à la somme des deux côtés non-correspondants du triangle des pieds des hauteurs.