

# SUR LES POLYNOMES DE FONTANA-BESSEL

Autor(en): **Appell, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20681>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES POLYNOMES DE FONTANA-BESSEL

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

Les formules connues de la théorie des différences appliquées aux polynomes

$$Q_\nu(x) = \frac{x(1-x) \dots (\nu-1-x)}{1 \cdot 2 \dots \nu} = - \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+\nu-1)}{1 \cdot 2 \dots \nu}, \quad (\alpha = -x)$$

$$Q_0(x) = -1, \quad Q_\nu(x+1) - Q_\nu(x) = -Q_{\nu-1}(x) \quad (1)$$

donnent évidemment des formules relatives aux polynomes

$$P_{\nu+1}(x) = \int_0^x Q_\nu(x) dx; \quad P_1(x) = -x \quad (2)$$

qui ont été considérés par Bessel pour  $x = 1$  à propos d'une formule de Fontana (Voyez, pour une bibliographie détaillée, une Note de M. Giovanni Vacca, dans les *Atti della reale Accademia Nazionale dei Lincei*, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie Sesta, Vol. 1, Fasc. 3, Seduta del 28 febbraio 1925, p. 206 et suiv.). Nous appellerons ces polynomes  $P_{\nu+1}(x)$  les polynomes de Fontana-Bessel. M. Ser a donné dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (2<sup>me</sup> Série, t. IV, 1925, p. 126 et suiv.) des formules relatives à ces polynomes. Il écrit notamment la formule suivante, dans laquelle C désigne la constante d'Euler

$$\log \Gamma(x+1) + Cx = P_2(x) + \frac{P_3(x)}{2} + \frac{P_4(x)}{3} + \dots \quad (3)$$

qui donne la formule de Fontana pour  $x = 1$ ; dans ce qui suit, nous désignerons par  $p_2, p_3, \dots$  les nombres rationnels  $P_2(1), P_3(1), \dots$ . En dérivant (3) par rapport à  $x$  on a

$$\Psi(x) + C = Q_1(x) + \frac{Q_2(x)}{2} + \frac{Q_3(x)}{3} + \dots \quad (4)$$

où  $\Psi(x)$  désigne la fonction de Gauss.  $\Psi(x) + C$  est, d'après Gauss (*Oeuvres*, t. III, p. 154 et suiv.) exprimable en termes finis quand  $x$  est commensurable; il en est de même de la série qui forme le second membre de (4). Par exemple les équations

$$\Psi\left(-\frac{1}{2}\right) + C = -2 \log 2, \quad \Psi\left(-\frac{1}{4}\right) + C = \frac{1}{2} \pi - 3 \log 2$$

donnent

$$\begin{aligned} -2 \log 2 &= Q_1\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} Q_2\left(-\frac{1}{2}\right) + \dots \\ -\frac{1}{2} \pi - 3 \log 2 &= Q_1\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} Q_2\left(-\frac{1}{4}\right) + \dots \end{aligned}$$

Comme  $\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x+1}$ , on a, d'après (1),

$$\frac{1}{1+x} = -\left[Q_0 + \frac{Q_1(x)}{2} + \frac{Q_2(x)}{3} + \dots\right];$$

de même

$$\frac{1}{2+x} - \frac{1}{1+x} = \left[\frac{Q_0(x)}{2} + \frac{Q_1(x)}{3} + \dots\right];$$

. . . . .

En intégrant ces relations, par rapport à  $x$ , de 0 à  $x$ , on a une série de formules dont la première a été donnée par M. Ser (*loc. cit.*); en les intégrant par rapport à  $x$  de 0 à 1 on voit apparaître les  $p$ .

La formule (1) intégrée par rapport à  $x$ , donne

$$P_{v+1}(x+1) - P_{v+1}(x) = -P_v(x) + p_{v+1},$$

qui exprime  $P_{v+1}(x+1)$  en

$$P_{v+1}(x) \quad \text{et} \quad P_v(x).$$

La formule (4) se trouve déjà dans le *Calcul intégral* de J. Bertrand, p. 160; en l'ordonnant par rapport à  $x$  et identifiant avec

$$S_2 x - S_3 x^2 + \dots,$$

où

$$S_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots,$$

on obtient des formules dignes d'attention.