G. Bouligand.—Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet (Mémorial des Sciences mathématiques: fass. XI). (Un fasc. gr in-8° de 52 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. .Paris. 1926.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

raissent les plus remarquables résultats transcendants nés, non de l'abstraction, mais d'énoncés physiques généralement très simples.

A. Buhl (Toulouse.)

G. Bouligand. — **Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. XI). Un fasc. gr. in-8° de 52 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

Le domaine, exploré ici — et combien savamment — par M. Bouligand, donne une excellente idée de la portée des conceptions d'analyse qui se sont surtout développées depuis le commencement du siècle : généralisations intégrales telles que celle de Lebesgue, calcul fonctionnel, lemmes de croissance, etc.

Le Problème de Dirichlet est d'origine physique ; il consistait d'abord à trouver la distribution de la température dans un solide chauffé, par sa surface externe, suivant un mode connu. Il a été étendu à l'hyperespace et M. Bouligand y voit effectivement la recherche d'une fonction harmonique de n variables prenant des valeurs données sur une frontière donnée. Les procédés intégraux abondent immédiatement ce qu'on aperçoit déjà avec la théorie du potentiel dans l'espace ordinaire : théorème de Gauss, équation de Poisson, etc. Mais il faut ici, toujours dans l'hyperespace, faire jouer un rôle particulièrement important au théorème de la moyenne qui fait d'une fonction harmonique une fonction invariante par *médiation* sphérique.

La notion de « fonction de Green » est également primordiale ; cette fonction offre cette opposition qu'elle peut s'introduire dans des formules *intégrales* par sa *dérivée* normale. Elle conduit aussi à une première équation *aux dérivées fonctionnelles*.

La fonction harmonique à déterminer admet, en général, la frontière à distribution donnée comme variété singulière. On peut d'abord chercher à construire (principe de Picard) une telle fonction dans le cas, d'apparence relativement simple, d'une seule source frontière, tout le reste de cette frontière étant maintenu au zéro. Il faut imaginer aussi des sources d'absorption. On conçoit, de plus, que l'arbitraire qui préside au choix des sources permet de discriminer les modes de variation de la fonction harmonique dans le voisinage de ces sources mêmes ; c'est de là que provient l'important « principe de la séparation des croissances ».

Le laplacien se transforme avec le ds^2 à n variables, d'où des équations solidaires de l'équation de Laplace étudiées dans le fascicule X du Mémorial (P. Humbert). Quant à la méthode absolument générale, elle tend à s'affranchir des équations intégrales, introduisant trop de restrictions propres à leur nature et non au problème, et à recourir à l'équation *aux différences finies* des *fonctions préharmoniques* ; ces fonctions sont uniquement définies aux *nœuds* d'un *réseau* par des valeurs moyennes de celles prises aux nœuds voisins. Mieux vaut renoncer à l'analyse bibliographique en abordant ces merveilles de l'Analyse mathématique. Nous n'apprendrons d'ailleurs à personne combien est grand le retentissement des travaux de M. Bouligand ; le jeune et brillant géomètre vient de faire un cours étendu à l'Université de Cracovie, cours résumé en un nouveau Mémoire *Sur le Problème de Dirichlet*, publié, en 1925, dans les « Annales de la Société polonaise de Mathématiques ». Nul doute que les lecteurs du « Mémorial » ne soient au moins aussi enthousiastes de toute cette grande œuvre que les professeurs et les étudiants de l'Institut mathématique de Cracovie.

A. BUHL (Toulouse.)

R. GOSSE. — **La Méthode de Darboux et les équations** $s = f(x, y, z, p, q)$. (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. XII). Un fascicule gr. in-8° de 54 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

L'étude entreprise d'abord est celle de l'équation du second ordre, en x, y, z, p, q, r, s, t, avec la notion générale de caractéristique. On peut se proposer de procéder, comme pour les équations de premier ordre, par adjonction d'une autre équation E à celle que l'on désire intégrer. Mais alors que la méthode, pour le premier ordre, dépend d'une fonction arbitraire, elle ne donne généralement, au second ordre, qu'un système s'intégrant avec des constantes. N'est-il pas possible de procéder de telle sorte que ces constantes soient en nombre infini ?

Cette première et importante question est résolue par l'affirmative quand E est en *involution* avec la proposée. Il en est ainsi, et l'involution est d'ordre n, quand les dérivées d'ordre $n + 1$, formées pour le développement taylorien de l'intégrale commune, sont données par des équations dont l'une rentre dans les autres. L'involution peut n'avoir lieu qu'en tenant compte de E, ou $\varphi = 0$; elle peut avoir lieu, plus généralement, avec $\varphi = c$. Il y a alors *invariant* d'ordre n. C'est un des points les plus attachants de l'exposé de M. Gosse que de développer tous les liens qui unissent les caractéristiques et les invariants. La théorie est puissante et se révèle plus générale que ne pourraient le faire supposer ses prémisses. Ainsi, pour deux équations en involution, il pourrait déjà sembler joli que l'infinité de constantes disponibles permette de faire passer une intégrale commune par une courbe arbitraire ; or, on trouve mieux, cette intégrale commune dépendant encore d'un nombre fini de constantes.

Les équations intégrables par la méthode de Darboux sont des équations à invariants distincts, ceux-ci dépendant de trois involutions d'ordre différent et supérieur à 3. De telles équations sont alors recherchées par l'auteur dans le type $s = f$. Malgré la forme relativement réduite de cette équation, la transcendance est encore redoutable ; on retrouve surtout ici, comme types maniables, les types envisagés par Laplace, Lie, Moutard, Darboux, Goursat, Clairin, Gau... C'est, en tout cas, une belle liste de cas d'intégrabilité ou de réduction à des formes canoniques remarquables. Restent les équations $s = f$ à intégrale intermédiaire ; il y a, là encore, des formes de f à discriminer avec habileté.

Intéressant fascicule revenant naturellement sur nombre de notions acquises à la Science mais avec une originalité brève, où l'auteur apporte la lumière de travaux récents, personnels et étendus.

A. BUHL (Toulouse).

A. VÉRONNET. — **Figures d'équilibre et Cosmogonie** (Mémorial des Sciences mathématiques ; fasc. XIII). Un fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1926.

Ce fascicule semble écrit avec une facilité extrême dans un domaine où abondent les analyses touffues, comme celles de Tisserand, à côté des