4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

En tenant compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* peut s'énoncer comme suit et il remplace alors les théorèmes III et III':

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est équivalent à la somme algébrique des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 5).

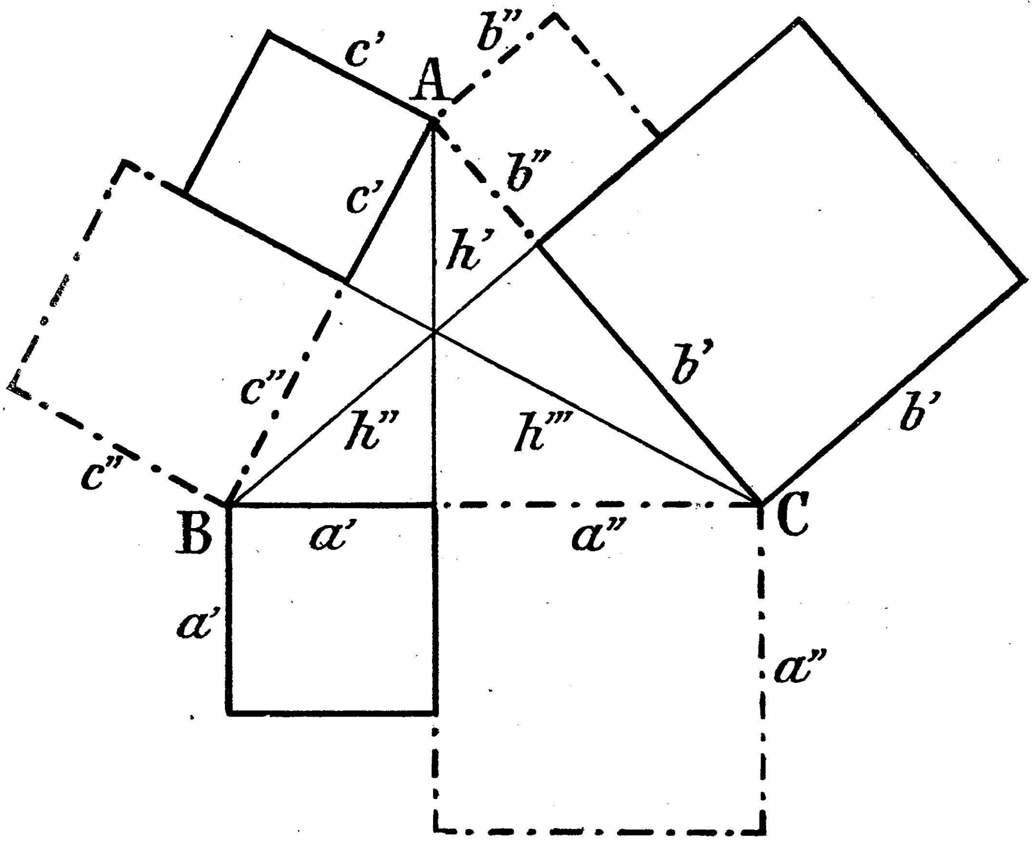

Fig. 5.

Les formules (2), sous leur première forme, peuvent s'écrire, en considérant que $a = a' + a''$, $b = b' + b''$, $c = c' + c''$,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' = a'a'' + b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + cc'' = b'b'' + c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + aa'' = c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2 . (a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

Sous leur seconde forme, elles deviennent

$$h'^2 = a'a'' + cc' = a'a'' + c'c'' + c'^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + aa' = b'b'' + a'a'' + a'^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + bb' = c'c'' + b'b'' + b'^2 ;$$

d'où

$$(\beta) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2.(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

De (α) et (β) résulte

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 .} \qquad (4)$$

SECOND CAS. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$).
Ici, $a = a' + a''$; $b = b' - b''$; $c = c'' - c'$.
Les formules (2'), première forme, peuvent donc s'écrire

$$h'^2 = a'a'' - bb'' = a'a'' - b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = - b'b'' + cc'' = - b'b'' - c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = - c'c'' + aa'' = - c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2.(a'a'' - b'b'' - c'c'') .$$

Sous leur seconde forme, elles deviennent

$$h'^2 = a'a'' - cc' = a'a'' - c'c'' + c'^2 ,$$
$$h''^2 = - b'b'' + aa' = - b'b'' + a'a'' + a'^2 ,$$
$$h'''^2 = - c'c'' + bb' = - c'c'' - b'b'' + b'^2 ,$$

d'où

$$(\beta) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(a'a'' - b'b'' - c'c'') .$$

De (α) et (β) résulte

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 .} \qquad (4)$$

On aboutit donc dans les deux cas au même résultat.
Par suite:

THÉORÈME IV. — *Dans un triangle* QUELCONQUE, *les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs déterminés par les hauteurs sur les côtés correspondants sont égales.*

CAS PARTICULIER. — Triangle *rectangle*.
Si $\alpha = 90°$, on a: $b' = b$, $b'' = 0$; $c' = 0$, $c'' = c$.

La relation (4) devient

$$a'^2 + b^2 = a''^2 + c^2 ,$$

ou

$$b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2 , \tag{5}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME V. — *Dans un triangle* RECTANGLE, *la différence des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale à la différence des carrés construits sur les segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur correspondante.*

5. — Démonstration des théorèmes II, III et IV basée sur le théorème de Pythagore généralisé.

En nous basant sur le *théorème de Pythagore généralisé*, nous pouvons démontrer le théorème II — d'où nous déduirons le théorème I — puis les théorèmes III et IV. Nous envisagerons le cas du triangle *acutangle*.

1° Pour le *théorème II* (fig. 2):

Appliqué au côté c, le théorème de Pythagore généralisé donne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' .$$

Or

$$c^2 = h'^2 + a'^2 .$$

En remplaçant on a

$$h'^2 + a'^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

d'où

$$h'^2 = a^2 - a'^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

$$h'^2 = (a' + a'')a - a'^2 + b^2 - 2aa'' =$$

$$= a'(a - a') - aa'' + b^2 .$$

Mais

$$aa'' = bb' .$$

Par suite

$$h'^2 = a'a'' - bb' + b^2 = a'a'' + b(b - b') ,$$

$$\underline{h'^2 = a'a'' + bb''} (= a'a'' + cc')$$

C'est la relation du théorème II.