

1. — Rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

PAR

A. STREIT, Dr Phil. (Berne).

INTRODUCTION.

Nous désignerons par a' , a'' , b' , b'' , c' , c'' les segments déterminés par les hauteurs d'un triangle sur les côtés respectifs a , b , c .

Nous démontrerons d'abord un théorème relatif au rectangle construit sur deux hauteurs, d'où nous déduirons un autre théorème concernant le carré construit sur une hauteur. En utilisant celui-ci, nous obtiendrons une propriété relative à la somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs et une relation se rapportant au carré construit sur un côté. En appliquant cette relation, nous aboutirons à diverses propriétés relatives aux hauteurs et à la somme des carrés construits sur les trois côtés. Enfin, nous établirons des formules nouvelles pour la somme et le produit des trois hauteurs.

1. — Rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque.

De la relation entre les angles α , β , γ d'un triangle (fig. 1)

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

on tire

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma = -\frac{a''}{b} = -\frac{a - a'}{b} = \frac{a'}{b} - \frac{a}{b}.$$

Mais

$$\frac{a'}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} + \frac{a' c''}{bc}.$$

En remplaçant on a

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a'}{c} \cdot \frac{c'}{b} - \left[\frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc} \right],$$

ou

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \left[\frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc} \right].$$

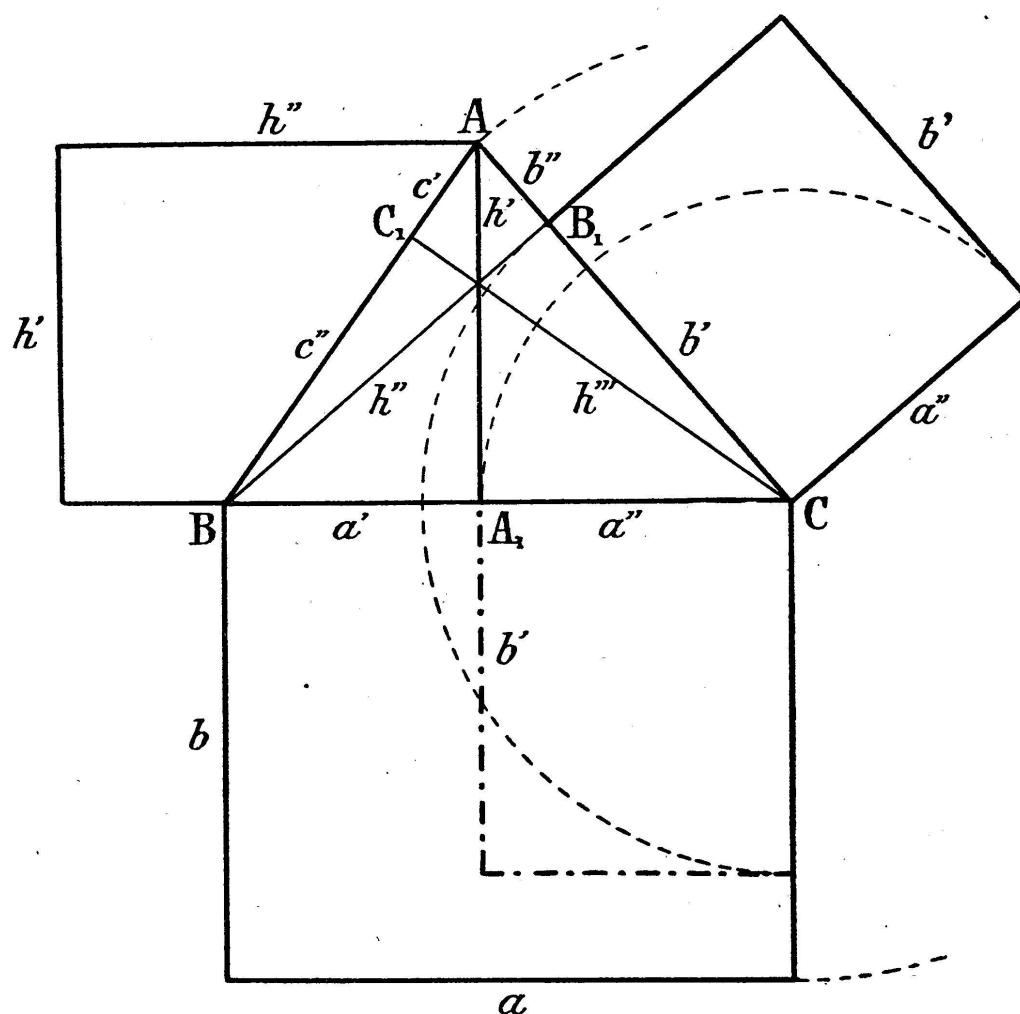


Fig. 1.

Or

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Par suite

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc}.$$

Mais

$$\sin \alpha = \frac{h'''}{b}; \quad \sin \beta = \frac{h'}{c},$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{h''' \cdot h'}{bc}.$$

On a donc

$$\frac{h''' h'}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc}.$$

$$h''' h' = ca - c'' a'.$$

Par permutation circulaire on a

$$\begin{cases} h' h'' = ab - a'' b', \\ h'' h''' = bc - b'' c', \\ h''' h' = ca - c'' a', \end{cases} \quad (1)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME I. — *Le rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque est égal au rectangle construit sur les deux côtés correspondants, diminué du rectangle construit sur les projections de ces côtés l'un sur l'autre.*

Remarque. — Ce théorème est valable quels que soient les angles du triangle.

2. — Carré construit sur une hauteur d'un triangle.

PREMIER CAS. — *Triangle ACUTANGLE (fig. 2).*

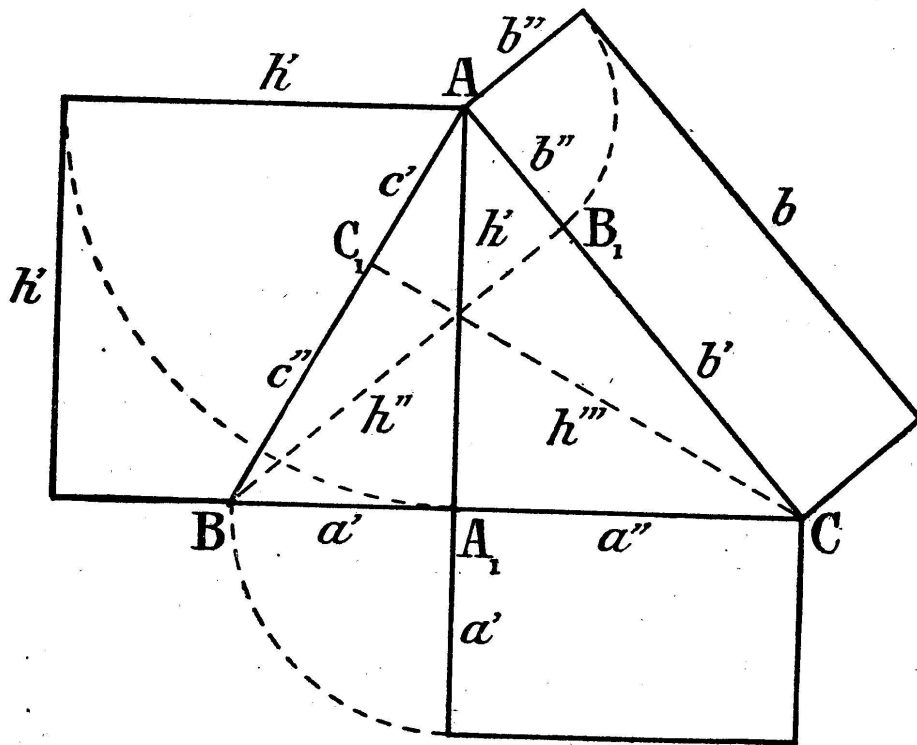


Fig. 2.

Soit ABC un triangle acutangle. D'après la première des formules du groupe (1), nous avons

$$h' h'' = ab - a'' b'.$$