

# § 7. LA THÉORIE DES CONSTANTES DE FOURIER.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

taines recherches; c'est le cas du *procédé de sommation dit de Poisson*, où l'on cherche la limite pour  $r \rightarrow 1 - 0$  de la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

et de celui qui se présente dans la *théorie de la propagation de la chaleur*:

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^{n^2} \right]$$

Notons encore le *procédé de Riemann*:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right].$$

Ces divers procédés possèdent dans le cas des séries de Fourier des propriétés analogues à celles que possède le procédé de M. de la Vallée-Poussin <sup>1</sup>.

## § 7. LA THÉORIE DES CONSTANTES DE FOURIER.

1. L'idée d'édifier à côté de la théorie de la convergence des séries de Fourier une théorie des suites des constantes de Fourier semble avoir été formulée pour la première fois d'une façon nette par HURWITZ <sup>2</sup> qui a montré que l'on peut additionner et multiplier entre elles les équivalences des fonctions intégrables bornées et qu'une équivalence intégrée terme à terme donne lieu à une égalité. Le problème général de cette théorie des constantes de Fourier est le suivant: De propriétés connues de  $f(x)$ , quelles conséquences conclure pour la suite de ses constantes de Fourier et inversement.

En réalité on sait très peu de choses sur les caractéristiques d'une suite de constantes de Fourier. On sait que  $a_n \rightarrow 0$  et que  $\sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n}$  converge <sup>3</sup>. Il n'existe pas de fonction  $\lambda(n)$  telle que

<sup>1</sup> Vallée-Poussin 2, Hahn 1. — <sup>2</sup> Hurwitz 3. — <sup>3</sup> Lebesgue 5, p. 102, 124.

$\lambda(n) \leq \lambda(n+1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(n) = \infty$  et pour laquelle  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lambda(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \lambda(n) = 0$  ait lieu pour toute suite de constantes de Fourier <sup>1</sup>.

Mais ces propriétés sont loin d'être suffisantes pour caractériser une suite de constantes de Fourier.

On sait encore que si une fonction  $f$  est à variation bornée, ses coefficients de Fourier satisfont à des inégalités du type

$$|a_n| < \frac{M}{n}, \quad |b_n| < \frac{M}{n}, \quad (21)$$

où  $M$  est une constante et que si elle est de plus continue et périodique

$$na_n \rightarrow 0, \quad nb_n \rightarrow 0.$$

On sait encore que si  $f$  est continue et périodique une relation  $na_n \rightarrow a$ ,  $nb_n \rightarrow b$  ne peut avoir lieu que si  $a = b = 0$  <sup>3</sup>.

Lorsque la fonction  $f$  continue périodique satisfait uniformément à une condition de Lipschitz, ou possède des dérivées jusqu'à un certain ordre, ou lorsqu'elle est analytique, les inégalités (21) peuvent être remplacées par de plus précises.

Du fait qu'une suite donnée  $a_n, b_n$  est une suite de constantes de Fourier on ne peut pas conclure que si l'on intervertit dans cette suite l'ordre d'une infinité de termes, la suite obtenue est encore une suite de constantes de Fourier. Par exemple, si l'on permute les  $a_n$  et les  $b_n$  de même indice entre eux, la nouvelle suite n'est plus nécessairement une suite de constantes de Fourier. Le rôle disymétrique des  $a_n$  et des  $b_n$  est d'ailleurs mis en évidence dans le fait que  $\sum \frac{b_n}{n}$  converge toujours pour une série de Fourier, tandis que  $\sum \frac{a_n}{n}$  ne converge pas nécessairement. Sous certaines conditions, M. W. H. YOUNG a établi que <sup>4</sup>

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \log \frac{1}{2(1 - \cos x)} dx ;$$

<sup>1</sup> Lebesgue 6. — <sup>2</sup> F. Riesz 5; Neder 3; Steinhaus 8, Czillag. — <sup>3</sup> Steinhaus 8, 9. — <sup>4</sup> W. H. Young 12.

or, l'intégrale du second membre diverge pour certaines fonctions intégrables. De même, si dans la suite  $a_n, b_n$  des constantes de Fourier d'une fonction on remplace une infinité de termes par zéro ou si l'on supprime certains termes en déplaçant l'indice de ceux qui suivent, les suites obtenues par ces opérations ne sont plus nécessairement des suites de constantes de Fourier. M. W. H. YOUNG<sup>1</sup> a étudié certains cas où du fait que la suite  $a_n, b_n$  est une suite de constantes de Fourier, la suite  $\frac{a_n}{\varphi(n)}, \frac{b_n}{\varphi(n)}$  est encore une suite de constantes de Fourier,  $\varphi(n)$  étant une fonction positive croissante tendant vers l'infini. Il a étudié aussi le cas où les  $\varphi(n)^{-1}$  sont les constantes de Fourier d'une fonction ou les coefficients de la série dérivée d'une série de Fourier.

2. Les résultats les plus importants de la théorie des constantes de Fourier sont contenus dans la formule de PARSEVAL, dans le théorème de RIESZ-FISCHER et dans leurs généralisations. Ces théorèmes se rapportent aux fonctions  $f(x)$  dont une puissance  $p$ -ième ( $p > 1$ ) est intégrable.

La *formule de Parseval*<sup>2</sup> énonce que si  $f(x)$  est de carré intégrable, c'est-à-dire si  $\int_0^{2\pi} f^2 dx$  est finie, la série  $\sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  converge et que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (22)$$

Une conséquence est que si  $g(x)$  est une seconde fonction de carré intégrable ayant la suite  $\alpha_n, \beta_n$  comme suite de constantes de Fourier, la série  $\sum (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$  converge et

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} fg dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n). \quad (23)$$

Le *théorème de Riesz-Fischer*<sup>3</sup> est relatif aux séries de fonctions orthogonales. Dans le cas particulier des séries trigonométriques il énonce que: Etant donnée une suite de constantes réelles

<sup>1</sup> W. H. Young 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16. — <sup>2</sup> Lebesgue 5, p. 100; voir aussi Vallée-Poussin 1; Hurwitz 3, 4; Fischer 1. — <sup>3</sup> F. Riesz 1, 3; E. Fischer 2; W. H. Young and G. C. Young; Plancherel.

$a_n, b_n$  assujéties à la seule condition:  $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$  converge, il existe une et, à une fonction d'intégrale nulle près, une seule fonction  $f(x)$  ayant la suite donnée  $a_n, b_n$  comme suite de constantes de Fourier. Cette fonction  $f(x)$  est de carré intégrable.

Ce théorème montre en particulier que si

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est de carré intégrable, la série conjuguée

$$\sum_1^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

est encore la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable.

3. La généralisation donnée par M. W. H. YOUNG<sup>1</sup> de ces théorèmes a été complétée sur un point par M. HAUSDORFF<sup>2</sup>. Sans avoir le caractère simple du théorème de Riesz-Fischer elle est aussi intéressante. Pour l'exprimer sous une forme concise, notons

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad (i = \sqrt{-1}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Evidemment

$$f_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad f_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k).$$

Notons encore

$$S_p = \left( \sum_{-\infty}^{\infty} |f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad J_p = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et supposons

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors:

I. Si  $p \leq q$  et si la suite arbitraire de constantes  $a_k, b_k$  est telle

<sup>1</sup> W. H. Young 9, 10; pour d'autres généralisations, en particulier pour l'étude du cas où (23) subsiste en sommant le second membre par une moyenne de Cesàro, voir W. H. Young 7, 8, 15. — <sup>2</sup> Hausdorff.

que  $S_p$  est fini, les  $a_k, b_k$  sont les constantes de Fourier d'une fonction  $f(x)$  telle que  $|f(x)|^q$  soit intégrable. De plus

$$J_q \leq S_p .$$

II. Si  $p \leq q$  et si la fonction arbitraire  $f(x)$  est telle que  $|f(x)|^p$  est intégrable, la série  $S_q$  formée à l'aide des constantes de Fourier de  $f$  converge et

$$S_q \leq J_p .$$

Pour  $p = q = 2$ , on retrouve le théorème de Riesz-Fischer et la formule de Parseval.

4. Si les fonctions  $f(x), g(x)$  sont telles que  $|f|^p$  et  $|g|^q$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 0, q > 0$ ) sont intégrables, la formule de Parseval (23) subsiste <sup>1</sup>.

5. La formule (23) subsiste encore si  $f$  est intégrable et  $g$  à variation bornée <sup>2</sup>.

6. Il n'est pas possible de caractériser d'une manière simple la suite des constantes de Fourier d'une fonction continue. On peut se demander, par exemple, s'il existe un exposant  $\alpha < 2$  tel que la série  $\Sigma(|a_n|^\alpha + |b_n|^\alpha)$  converge pour toute fonction continue. Mais la réponse est négative <sup>3</sup>.

Il est intéressant de noter que si la suite des constantes  $a_n, b_n$  est telle que  $\Sigma(|a_n|^\alpha + |b_n|^\alpha)$  converge pour un exposant  $\alpha > 2$  la série  $\Sigma A_n$  peut ne pas être une série de Fourier, ni même une série de Fourier généralisée, engendrée par une fonction intégrable au sens de Harnack-Lebesgue. C'est, par exemple, le cas des séries <sup>4</sup>

$$\Sigma n^{-a} \cos(n^2 x) , \quad \Sigma n^{-a} \sin(n^2 x) , \quad a \leq \frac{1}{2} .$$

TITCHMARSH <sup>4</sup> et PERRON <sup>6</sup> donnent d'autres exemples, à certains égards plus simples.

7. Des résultats très curieux ont été obtenus par M. CARATHEODORY <sup>7</sup> sur les constantes de Fourier des fonctions positives.

Pour que la série de puissances  $1 + \sum_1^\infty (a_n + ib_n)z^n$  converge

<sup>1</sup> M. Riesz 8. Young 8. — <sup>2</sup> Young 8. — <sup>3</sup> Carleman. — <sup>4</sup> Hardy and Littlewood 1. — <sup>5</sup> Titchmarsh 1. — <sup>6</sup> Perron. — <sup>7</sup> Caratheodory 1, 2.

pour  $|z| < 1$  et ait pour  $|z| < 1$  sa partie réelle positive, il faut et il suffit que le point  $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$  de l'espace à  $2n$  dimensions appartienne au corps  $K_n$  défini comme le plus petit corps convexe contenant la courbe

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cos \varphi, & x_2 &= 2 \cos 2\varphi, & \dots, & & x_n &= 2 \cos n\varphi \\ y_1 &= -2 \sin \varphi, & y_2 &= -2 \sin 2\varphi, & \dots, & & y_n &= -2 \sin n\varphi \end{aligned}$$

et cela quelque soit  $n$ .

M. TŒPLITZ<sup>1</sup> a réussi à exprimer ce résultat sous forme algébrique. En posant

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & , & a_1 + ib_1 & , & \dots & a_n + ib_n \\ a_1 - ib_1 & , & 2 & & & a_{n-1} + ib_{n-1} \\ a_2 - ib_2 & , & a_1 - ib_1 & & & a_{n-2} + ib_{n-2} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_n - ib_n & , & a_{n-1} - ib_{n-1} & & & 2 \end{vmatrix}$$

et en désignant par  $H_n$  la forme d'Hermite dont  $D_n$  est le discriminant, son résultat énonce qu'une fonction continue périodique de période  $2\pi$  est  $\geq 0$  lorsque les coefficients  $a_n, b_n$  de sa série de Fourier sont tels que les formes  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  ne sont pas négatives.

Ces théorèmes sont en relation étroite avec le théorème de Picard-Landau. Ils appartiennent plutôt au domaine de la théorie des fonctions d'une variable complexe; c'est pourquoi nous n'insisterons pas ici sur les développements et les recherches qu'ils ont provoqués. Notons simplement qu'ils permettent de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de constantes soit la suite des constantes de Fourier d'une fonction mesurable bornée, d'une fonction bornée intégrable au sens de Riemann ou d'une fonction monotone<sup>2</sup>.

## § 8. SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE ET SÉRIE CONJUGUÉE.

### 1. A toute série trigonométrique

$$A_0 + \sum_1^{\infty} A_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

<sup>1</sup> Toeplitz 1; voir aussi Fischer 3. — <sup>2</sup> Caratheodory und Fejér; Caratheodory 3, 4.