VII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

de A. D'après cela, les seuls groupes d'holonomie possibles sont pour $n=2$:

1. Le groupe projectif général à 8 paramètres;

2. Le sous-groupe invariant à 6 paramètres du groupe qui laisse invariant un point fixe; dans ce cas l'équation différentielle des géodésiques, au lieu d'être de la forme générale indiquée ci-dessus, est réductible à la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{A}(x, y) ;$$

mais on peut, sans faire la réduction, obtenir par une quadrature un multiplicateur de Jacobi de cette équation.

Je citerai enfin, comme dernier exemple, le cas des espaces réels de Weyl à trois dimensions, en supposant le ds^2 défini positif. Si le groupe d'holonomie n'est pas un sous-groupe du groupe des déplacements, il est, soit le groupe de toutes les similitudes (cas général), soit le groupe des déplacements et des similitudes qui laissent invariante une direction fixe; dans ce cas les deux formes, quadratique et linéaire, qui définissent l'espace, sont:

$$ds^2 = dz^2 + \mathrm{H}(x, y, z)(dx^2 + dy^2), \qquad \omega = -\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial z} dz .$$

VII

J'aborde une dernière question, extrêmement intéressante. On sait le rôle que joue la théorie des groupes comme principe de subordination dans les géométries (holonomes) à groupe fondamental. La géométrie élémentaire, par exemple, se subordonne à la géométrie projective en ce sens que les propriétés euclidiennes d'une figure sont tout simplement les propriétés projectives de la figure plus complète formée par la figure donnée et le cercle imaginaire de l'infini; la géométrie élémentaire est au fond un simple chapitre de la géométrie projective, et cela tient à ce que le groupe fondamental de la première est un sous-groupe du groupe fondamental de la seconde. Il convient d'insister sur ce fait que l'espace projectif peut être, d'une infinité de manières différentes, regardé comme un espace métrique, car on peut y distinguer n'importe quelle conique non dégénérée qui sera susceptible d'y jouer le rôle du cercle imaginaire de l'infini, ou encore n'importe quelle quadrique non dégénérée (et alors on aura un espace non euclidien ou cayleyen).

D'une manière générale tout espace holonome à groupe fondamental G peut être regardé comme un espace holonome à groupe fondamental G′ si G′ est un sous-groupe de G.

Existe-t-il quelque chose d'analogue pour les espaces non holonomes ? La réponse à cette question est facile et à peu près évidente:

Pour qu'un espace non holonome à groupe fondamental G *puisse être regardé comme un espace non holonome à groupe fondamental* G′, *il faut et il suffit que son groupe d'holonomie g soit* G′ *ou un sous-groupe de* G′.

En particulier un espace à connexion projective à trois dimensions ne peut qu'exceptionnellement être regardé comme un espace métrique; il faut et il suffit pour cela que son groupe d'holonomie laisse invariante soit une conique, auquel cas il sera en général un espace de H. Weyl, soit une quadrique.

Un espace de H. Weyl ne peut être regardé comme un espace de Riemann que si son groupe d'holonomie est le groupe des déplacements (sans homothétie) ou un de ses sous-groupes.

Sans vouloir multiplier les exemples, nous pouvons indiquer une application intéressante à la théorie de la relativité. Dans l'étude de l'Univers physique, on peut porter son attention sur le côté projectif (défini par les trajectoires d'un point matériel abandonné à lui-même), ou sur le côté conforme (défini par les lois de la propagation de la lumière, lesquelles dépendent simplement d'une équation différentielle quadratique $ds^2 = 0$). Plaçons-nous d'abord au premier point de vue. Une première hypothèse est que le système différentiel qui définit les trajectoires mécaniques est de la forme particulière signalée plus haut, c'est-à-dire qu'elles peuvent être regardées comme les géodésiques d'un espace à 4 dimensions à connexion projective. La loi de la gravitation dans le vide d'Einstein peut alors s'exprimer ainsi: le groupe d'holonomie de l'Univers mécanique, considéré comme espace non holonome projectif normal à 4 dimensions, laisse invariante une quadrique (1re forme de la loi d'Einstein), ou une hyperquadrique (2me forme de la loi, avec constante cosmologique). Cela revient à dire, dans l'un et l'autre cas, que l'Univers est métrique, et sa métrique se déduit de la seule connaissance des trajectoires.

Si l'on se place au second point de vue, la seule connaissance des lois de propagation de la lumière, supposées définies par une équation de Monge quadratique, permet d'attribuer à l'Univers une connexion conforme normale bien déterminée; la loi de la gravitation dans le vide d'Einstein peut alors s'exprimer ainsi: le groupe d'holonomie de l'Univers optique, considéré comme espace non holonome conforme normal à 4 dimensions, laisse invariante une hypersphère de rayon nul (1re forme de la loi d'Einstein), ou une hypersphère de rayon non nul (2me forme de la loi avec constante cosmologique). Cela revient à dire, dans l'un et l'autre cas, que l'Univers est métrique, et sa métrique se déduit de la seule connaissance de la loi de propagation de la lumière.

Ajoutons enfin que les deux métriques d'Univers déduites, l'une des trajectoires mécaniques, l'autre des lois de propagation de la lumière, coïncident.

VIII

Indiquons en terminant la relation qui existe entre la notion de groupe d'holonomie et la notion de classe d'un espace de Riemann. M. G. Ricci a désigné sous ce nom le plus petit entier k tel que l'espace de Riemann supposé à n dimensions puisse être réalisé par une variété convenablement choisie de l'espace euclidien à $n+k$ dimensions. M. J. A. Schouten a démontré que, dans certains cas très étendus, la classe était égale au nombre de paramètres dont dépend la position finale du corps de vecteurs issus d'un point A, transporté par parallélisme le long d'un contour fermé partant de A. Il est à peu près évident que ce nombre n'est autre que l'ordre du groupe γ qui indique comment le groupe d'holonomie g de l'espace de Riemann transforme entre elles les directions (ou les points à l'infini). Il y aurait lieu de reprendre cette question et de voir si le théo-