V. — Espace.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

V. — Espace.

1. — *Triangle impropre.* On a trois points remarquables $^0\underline{c}$, $^1\underline{c}$, $^2\underline{c}$, dans chaque espace **A**. Ce sont les points d'intersections $(^0\underline{C}\mathbf{A})$, $(^1\underline{C}\mathbf{A})$, $(^2\underline{C}\mathbf{A})$. Ils déterminent le plan impropre de l'espace **A**. $^0\underline{c}$ est le point impropre de la trace T de **A** sur π. On l'obtient, en joignant deux traces x, x' de deux plans α, α' de **A** (IV, 1). Le point $^i\underline{c}$ n'a pas sa i-ième projection (II, 2). Pour le trouver, on cherche la droite d'intersection D des plans $(^i\underline{c}T)$ et α. Sa i-ième projection D_i est sur T, parce que le plan $(^i\underline{c}T)$ passe par $^i\underline{c}$ (IV, 2, A). On trouve d'après IV, 4, A sa k-ième projection dans α_k. Parce que la droite cherchée rencontre π, les rayons de rappels de ses points passent par $^i\underline{c}_k$ (III, 2, B). C'est la k-ième projection du centre de projection $^i\underline{c}$ pour la droite D. Nous appelons $^0\underline{c}\,^1\underline{c}\,^2\underline{c}$ *triangle impropre* de l'espace **A**.

2. — *Positions exceptionnelles.* — A. **A** contient π. Alors les projections $^i\underline{c}_k$ et $^k\underline{c}_i$ se confondent. C'est donc la méthode élémentaire de projection avec les centres à l'infini.

B. **A** contient $^i\underline{C}$. Dans ce cas, sa trace T_i est sa i-ième projection. Spécialement pour $i = 2$:

La deuxième projection de l'espace demiorthogonal à π est une droite.

C. **A** contient $^1\underline{C}$ et $^2\underline{C}$. Il est donc l'unique espace impropre de l'hyperespace.

3. — *Point et espace.* Soit donné un point quelconque p_i dans π. Le plan $(^i\underline{C}p)$ et l'espace donné **A** se rencontrent suivant une droite P qui passe par $^i\underline{c}$. p_i est donc la i-ième projection d'une droite P de **A**, passant par $^i\underline{c}$. Or, il nous faut encore un de ses points pour la connaître. Le plus facile est de déterminer le point d'intersection p' de P et du plan $(^k\underline{c}T)$, parce que sa k-ième projection se trouve sur T_k. Le point d'intersection de T_{12} et de $(^k\underline{c}_i p_i)$ nous livre p'_k. $P_k \equiv (^i\underline{c}_k p'_k)$.

Toutes les droites P_k sont parallèles.

4. — *Droite et espace.* Trouvons la k-ième projection D_k d'une droite D de **A**, si D_i est donnée. Il suffit de répéter deux fois la construction de V, 3, pour deux points a et b, sur D. Il s'en suit aussitôt que chaque droite de π peut être considérée comme la

k-ième projection D_k appartenant à D_i, pourvu que l'on fasse correspondre à deux points a_i et b_i de D_i les points a_k et b_k sur D_k d'après V, 3.

Grâce à cette méthode, on peut facilement trouver le point d'intersection d'une droite quelconque E et de l'espace **A**. On trouve, d'après la méthode que nous venons d'expliquer, une droite D dans **A** telle que l'on a $E_1 \equiv D_1$ et $E_2 \equiv D_2$. Les droites E et D se rencontrent au point cherché (III, 3).

5. — *Plan et espace. Deux espaces.* Pour trouver l'intersection de ces deux figures linéaires, on procède d'après la méthode précédente et on détermine ainsi le nombre nécessaire des points communs à ces deux figures linéaires.

6. — *Constructions auxiliaires* pour résoudre les problèmes non métriques dans **A**. On peut projeter l'espace **A** d'un point o quelconque (non situé dans **A**) sur un espace **A**$'$ contenant π. Grâce à cette projection on parvient à la méthode élémentaire de projection sur π. Soit donc $\mathbf{A} \equiv (a\,{}^2c\,{}^1c\,{}^0c)$ l'espace à projeter, $\mathbf{A}' \equiv ({}^1c', {}^2c'\,\pi)$ l'espace de projection et o sur ${}^iC$ le centre de projection. Chaque point a de **A** a $a_i \equiv a'_i$, si a' désigne le point projeté sur **A**$'$. Le point a' se trouve sur $P \equiv (oa)$. Mais, parce qu'il est aussi dans **A**$'$, le point d'intersection des rayons $(a'_i\,{}^ic'_k)$ et P_k nous représente a'_k. Pour projeter un point quelconque a' de **A**$'$ sur **A**, il faut trouver la droite A_k appartenant à a_i dans **A** (V, 3). L'intersection de cette droite avec $P_k \equiv (\underline{o}_k\,a'_k)$ nous donne a_k. On approuve facilement le théorème suivant: *Le plan d'intersection des espaces* **A** *et* $(\underline{o}\,\pi)$ *se projette en* π.

Pour résoudre un problème nonmétrique dans **A**, on le projette sur **A**$'$ et on y effectue la résolution. On fait ensuite projeter la figure cherchée sur **A**, d'après la méthode ci-dessus exposée.

VI. — Orthogonalité.

1. — *Notes préliminaires.* Soient $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ les droites impropres de deux plans α, α'. Pour trouver les angles extrêmes d'inclinaison de ces deux plans, il faut trouver d'abord deux sécantes $\underline{B}$, $\underline{B}'$ à $\underline{A}$, $\underline{A}'$ qui soient conjuguées par rapport à la sphère absolue. Ce sont les droites impropres de deux plans complètement orthogonaux β et β', demiparallèles et demiorthogonaux à