Ombilics et lignes de courbure.

limites de Poncelet sont les deux points fixes où se croisent tous les cercles m (*Sections coniques* de Salmon); par tout point du plan, distinct des points limites, passe un et un seul cercle m. Les deux points limites sont donc deux points singuliers.

δ) Considérons enfin le cas si bien connu des coniques homofocales; si l'on suppose $\lambda^2 > c^2 > \mu^2 > 0$, les ellipses

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

ont pour trajectoires les hyperboles

$$\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \quad ;$$

par chaque point *réel* du plan on peut mener une et une seule ellipse λ, une et une seule hyperbole μ. Il n'y a que deux exceptions: en chacun des points $y = 0$, $x = \pm c$, l'ellipse et l'hyperbole dégénèrent en une seule et même droite. Ces deux points sont singuliers, mais présentent une singularité tout à fait différente de celles que nous avons rencontrées aux paragraphes β) et γ).

Ombilics et lignes de courbure.

1. — *Plan et sphère.* Pour ces deux surfaces le problème des lignes de courbure ne prend un sens précis que si l'on adopte pour ces lignes la définition que nous avons rappelée plus haut. Alors chaque ligne de la surface est une ligne de courbure, et tous les points sont des ombilics. On sait que ce sont les seules surfaces qui jouissent de cette propriété.

2. — *Tore.* Toutes les lignes de courbure sont circulaires; et le tore ne possède aucun ombilic. La disposition des lignes de courbure et leurs relations mutuelles rappellent la configuration α) dont il s'est agi plus haut.

3. — *Hyperboloïde de révolution.* Tout se passe ici comme pour le tore, à cela près que, si les lignes de courbure de l'une des familles sont encore circulaires, les autres sont hyperboliques.

4. — *Paraboloïde de révolution.* Les lignes de courbure des deux familles, qui sont respectivement des paraboles et des circonférences, rappellent la disposition β) des coordonnées polaires du

plan. La surface possède un seul ombilic par où viennent passer toutes les lignes de courbure paraboliques; il y en passe donc une infinité. D'autre part l'ombilic peut être considéré comme un point limite à la Poncelet des lignes de courbure circulaires.

5. — *Ellipsoïde de révolution.* La surface admet deux ombilics par chacun desquels viennent passer toutes les lignes de courbure elliptiques; donc chaque fois une infinité. L'ensemble des lignes de courbure rappelle le double système γ) des circonférences de deux faisceaux conjugués (Gob, *loc. cit.*, p. 211). Les deux ombilics jouent le rôle des deux points limites de Poncelet.

6. — *Ellipsoïde à trois axes inégaux.* Les lignes de courbure de cette quadrique, que déjà Monge avait obtenues, sont des biquadratiques, ainsi que cela résulte d'un célèbre théorème de Charles Dupin. Dans son ouvrage cité plus haut, Hoüel les étudie d'une façon très détaillée et tout à fait remarquable (§§ 688, 704-708, 847, 987-992). On trouve d'ailleurs une étude absolument identique dans certains ouvrages beaucoup plus récents, notamment dans les *Grundlagen der Differentialgeometrie* de J. Knoblauch (Teubner, Leipzig und Berlin, 1913; §§ 33, 64, 65, 81, 84, 85 et *passim*). La disposition des lignes de courbure rappelle le problème δ) des trajectoires. La surface a quatre ombilics par chacun desquels il ne passe qu'une seule ligne de courbure; c'est d'ailleurs la même pour les quatre ombilics : c'est la section faite dans l'ellipsoïde par le plan des deux axes extrêmes.

7. — *Tessaroïde.* Nous allons nous occuper maintenant des ombilics spéciaux que nous avons signalés à la fin de notre introduction; nous n'examinerons que deux surfaces pour lesquelles nous nous permettrons de proposer les noms respectifs de *tessaroïde* et de *cuboïde.*

Soit d'abord la surface du troisième ordre

$$xyz = p^3 ;$$

elle se compose de quatre nappes distinctes, dont chacune admet un ombilic. L'ensemble de ces quatre nappes possède la symétrie cristallographique du tétraèdre régulier, comme nous l'avons montré dans le mémoire mentionné plus haut *(Applications géométriques de la Cristallographie)*. Les lignes de courbure, obtenues par Cayley, sont algébriques (Cf. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1re partie, 1914, pp. 247-251). La droite représentée par les équations $x = y = z$ est pour la surface un axe de symétrie ternaire, un Λ^3. Celle des quatre nappes située dans le trièdre des coordonnées positives, est rencontrée par cet axe ternaire en son ombilic $x = y = z = p$. Par le même Λ^3 passent trois plans de symétrie dont les équations respectives sont $y = z$, $z = x$, $x = y$, et dont chacun coupe la surface orthogonalement, donc sous un angle constant. Il résulte alors d'un théorème de Joachimsthal que chacune de ces trois sections planes est une ligne de courbure. Ce sont d'ailleurs trois géodésiques. On pourrait évidemment se demander si, par l'ombilic, ne passe aucune autre ligne de courbure; la symétrie autour du Λ^3 exige que le nombre total de ces lignes de courbure soit multiple de 3. Pour résoudre la question, nous pouvons employer la méthode qu'indique Hoüel (§ 704): nous projetterons les lignes de courbure sur le plan des xy, et nous représenterons par m le coefficient angulaire des projections obtenues. Nous lèverons, par le moyen de la règle de L'Hospital, les indéterminations que nous rencontrerons. Pour trouver les lignes de courbure se croisant à l'ombilic, nous devrons alors résoudre l'équation

$$2m^3 + 3m^2 - 3m - 2 = 0 \; ,$$

ou

$$(m - 1)(2m^2 + 5m - 2) = 0 \; ,$$

dont les trois racines sont effectivement réelles. Il y a donc trois lignes de courbure, ni plus ni moins.

Nous avions l'intention de dessiner les lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic, mais les calculs nécessaires nous ont paru si laborieux que nous avons dû y renoncer. Et cependant nous possédions les équations des lignes de courbure en termes finis. Cf. SERRET *(Journal de Liouville*, 1re série, t. XII, 1847, p. 246) et DARBOUX *(Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 2e série, t. VII, 1878, p. 227).

8. — *Cuboïde.* Dans le même mémoire nous avons prouvé que la surface

$$x^4 + y^4 + z^4 = a^4 \; ,$$

dont la symétrie est celle du cube, possède quatorze ombilics.

Envisageons d'abord l'un quelconque des huit ombilics $x = \pm y = \pm z$. Par chacun d'eux passe un des quatre axes ternaires de la surface. En chacun d'eux se croisent trois lignes de courbure que l'on aperçoit tout de suite ($y = \pm z$, $z = \pm x$, $x = \pm y$). Ces lignes sont situées dans des plans de symétrie; ce sont des géodésiques, comme on le démontre sans difficulté.

Par l'un des six ombilics quaternaires, l'un de ceux auxquels aboutissent les Λ^4, par exemple par celui dont les coordonnées sont $x = y = 0$, $z = a$, passent quatre lignes de courbure, qui sont encore des géodésiques, et dont voici les équations:

$$x = 0\ , \qquad y = 0\ , \qquad x = \pm y\ .$$

Ces géodésiques, lignes de courbure, sont de deux sortes: trois d'entre elles ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) ne passent que par les ombilics quaternaires; les six autres ($y = \pm z$, $z = \pm x$, $x = \pm y$) passent à la fois par des ombilics ternaires et par des ombilics quaternaires. Nous avons démontré *(loc. cit.)* que l'ensemble des trois premières constituait sur la surface le lieu des points paraboliques.

Sont-ce bien là toutes les lignes de courbure que nous cherchons ? La méthode enseignée par Hoüel nous permettrait de le voir; mais nous n'avons pas fait les calculs qui nous ont paru fastidieux.

Pour l'ensemble des lignes de courbure les quatorze ombilics présentent donc une singularité assez curieuse: par tout point infiniment voisin d'un ombilic on peut mener deux lignes de courbure, et rien que deux, mais par l'ombilic lui-même on peut dans le cas actuel en mener un plus grand nombre.

Conclusion.

Ce qui précède nous semble prouver qu'il serait très difficile de fournir pour la question proposée une réponse à la fois précise et simple. En se restreignant aux solutions *réelles*, on voit que par un ombilic il peut passer une infinité de lignes de courbure (4°, 5°), ou bien qu'il n'en passe qu'une seule (6°), ou bien enfin un nombre tout à fait quelconque (7°, 8°). Dans cette dernière