TROUVER UNE COURBE DONT LA COURBURE ET LA TORSION RELATIVES A CHAQUE POINT AIENT UN RAPPORT CONSTANT

Cette équation peut être obtenue directement. En effet, de l'équation donnée:

$$V\alpha\rho\beta = \gamma ,$$

on tire

$$S\alpha V\alpha\rho\beta = S\alpha\gamma ,$$

ou

$$S.\alpha(\alpha\rho\beta - S\alpha\rho\beta) = S\alpha\gamma$$

$\alpha S\alpha\rho\beta$ étant un vecteur, on a simplement

$$\alpha^2 S\rho\beta = S\alpha\gamma ,$$

ou

$$\alpha S\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma ,$$

de même

$$\beta S\rho\alpha = \beta^{-1} S\beta\gamma ,$$

ce qui donne

$$\gamma = V\alpha\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma - \rho S\alpha\beta$$

et l'on retrouve bien l'équation obtenue en appliquant la formule d'Hamilton.

TROUVER UNE COURBE DONT LA COURBURE ET LA TORSION RELATIVES A CHAQUE POINT AIENT UN RAPPORT CONSTANT

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Soit $\rho = f(s)$ l'équation de la courbe cherchée, s désignant l'arc. Nous représenterons la courbure et la torsion en un point M par les lettres c et c_1. On trouve aisément

$$S\rho'\rho'' = 0 , \qquad T\rho' = 1 , \qquad T\rho'' = c ,$$

et

$$\rho'\rho'' = c\alpha , \tag{1}$$

α désignant un vecteur-unité perpendiculaire au plan osculateur en M. On a donc:

$$\alpha = \frac{\rho'\rho''}{c} = \frac{\rho'\rho''}{\mathrm{T}\rho''} ,$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho'\rho''}{\mathrm{T}\rho''}\right) . \tag{2}$$

Mais en remarquant que $\frac{d\alpha}{ds}$ est parallèle à ρ'' on a:

$$\frac{d\alpha}{ds} = c_1 \frac{\rho''}{\mathrm{T}\rho''} = nc\frac{\rho''}{\mathrm{T}\rho''} = n\rho'' , \tag{3}$$

et en intégrant

$$\frac{\rho'\rho''}{\mathrm{T}\rho''} = n\rho' + a , \tag{4}$$

n désignant le rappotr $\frac{c_1}{c}$ et a un vecteur invariable. Nous poserons $a = \lambda h$, λ désignant un vecteur unité constant.

Dans (4) le tenseur du premier membre est égal à 1; donc

$$(n\rho' + a)^2 = -1 ,$$

Ce qui donne

$$2nh\mathrm{S}\lambda\rho' = n^2 + h^2 - 1 .$$

Il en résulte que $\mathrm{S}\lambda\rho'$ est constant; ce qui exprime que la tangente à la courbe cherchée en un point quelconque M, fait un angle constant avec une droite de direction invariable. La courbe est donc une hélice tracée sur un cylindre quelconque.

Remarque. — Les relations d'où nous sommes partis peuvent s'établir très facilement par la géométrie analytique.

RÉCIPROQUEMENT. — *Dans toute hélice le rapport* n *est constant.*

Prenons l'arc des z parallèle aux génératrices du cylindre qui porte l'hélice et supposons l'origine de l'arc s dans le plan xoy, les exas étant, bien entendu, supposés rectangulaires. L'équation de l'hélice peut s'écrire:

$$\rho = ix + jy + kls ,$$

x et y étant des fonctions de s. En prenant les dérivées par rapport à s,

$$\rho' = ix' + jy' + kl .$$

La condition $T\rho' = 0$ donne:

$$x'^2 + y'^2 + l^2 = 1 .$$

Si l'on pose $1 - l^2 = p^2$, on pourra écrire

$$x' = p \cos \varphi \qquad y' = p \sin \varphi ,$$

$$\rho' = ip \cos \varphi + jp \sin \varphi + kl ,$$

$$\rho'' = (-i \sin \varphi + j \cos \varphi) p \varphi' ,$$

donc

$$c = T\rho'' = p\varphi' ,$$

$$\alpha = \frac{\rho' \rho''}{c} = - il \cos \varphi - jl \sin \varphi + kp ,$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{ds} = (i \sin \varphi - j \cos \varphi) l \varphi' . \tag{5}$$

D'ailleurs, l'équation (3) donne

$$\frac{d\alpha}{ds} = n\rho'' = n(- i \sin \varphi + j \cos \varphi) p \varphi' . \tag{6}$$

En comparant (5) et (6) on a donc $n = -\frac{l}{p}$ et par suite le rapport $\frac{c_1}{c}$ est constant. *c. q. f. d.*