Gaston Julia. — Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, professées au Collège de France et rédigées par P. Flamant (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de viii-152 p., 20 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

rithme initial. Il reste seulement à ordonner l'ensemble; je prétends que MM. Burali-Forti et Boggio y contribueront, car un livre comme le leur ne passera pas sans faire réfléchir utilement. Un point sur lequel ils ont eu nettement tort, c'est d'avoir pris texte de toutes les rêveries romantiques de prétendus vulgarisateurs; ces derniers ne méritent pas qu'on les combatte, car s'ils cultivent le paradoxe, pour l'amusement des incompétents, sur des terrains qui ne sont point ceux de la science, les véritables savants n'ont pas à s'occuper d'eux.

A. BUHL (Toulouse).

Gaston JULIA. — **Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé,** professées au Collège de France et rédigées par P. FLAMANT (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de VIII-152 p., 20 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Ces belles leçons se rapportent surtout à des théorèmes dont le prototype a été mis en lumière, en 1879, par M. Emile Picard. Il s'agit des équations analytiques, lesquelles possèdent *presque* fatalement des racines. Naturellement, il suffit qu'on soit amené à dire *presque* pour que le mathématicien étudie, avec acharnement, les cas où la prédiction générale ne se vérifie pas. Et, là comme ailleurs, ce sont surtout les cas singuliers, qui sont les plus dignes objets de science. M. E. Picard avait d'abord montré qu'à une fonction entière correspondait, au plus, une valeur finie que la fonction ne pouvait prendre; la démonstration s'appuyait sur la théorie de la fonction modulaire. M. E. Borel, tout en cherchant à généraliser l'assertion, avait voulu des démonstrations directes. MM. Landau, Carathéodory, Schottky ont pu passer de la fonction entière au cas plus général de la fonction simplement *uniforme* connue, au voisinage de l'origine, par un développement taylorien. Puis vient, dans l'ordre logique, le théorème général de M. Picard sur la fonction uniforme au voisinage d'un point essentiel et qui ne peut se refuser à prendre que deux valeurs au plus. C'est du côté des démonstrations que se manifeste peut-être le plus d'intérêt, à cause de la dualité indiquée. La théorie générale des fonctions doit certainement pouvoir se suffire à elle-même mais il est aussi bien intéressant de se demander si la fonction modulaire ne pourrait pas encore se prêter à des démonstrations généralisant celle donnée, en premier lieu, par M. Picard. Dans l'ouvrage de M. Gaston Julia, il semble que c'est surtout cette dernière méthode qui soit remise en honneur et le jeune et brillant auteur, après avoir rappelé brièvement les principes de la théorie des fonctions uniformes, a justement développé quelques généralités modulaires dont il se sert ensuite dans tout le cours de l'ouvrage, comme d'instruments d'une grande puissance.

Parmi les notions qui servent à approcher d'un point singulier, qu'on peut toujours prendre pour origine, signalons aussi celle de *famille normale* de fonctions, travaillée surtout par M. P. Montel. C'est l'étude de la suite dont le terme général est $f(\sigma^n z)$; cette suite, considérée dans une seule et même couronne, remplace l'étude de $f(z)$ dans des couronnes tendant à s'évanouir en O. Dans le cas des fonctions méromorphes, la méthode permet des dénombrements de pôles.

Les trois derniers chapitres de l'ouvrage seront peut-être les plus féconds comme laissant entrevoir un grand nombre d'applications, non toutes énumérées d'ailleurs. Il ne s'agit pas tant, pour percer le mystère du point singulier, de l'entourer étroitement de toutes parts que d'aller vers lui, par des chemins exceptionnels et habilement choisis. Déjà, M. G. Mittag-Leffler, dans ses élégantes recherches sur la sommabilité, avait besoin de fonctions entières s'annulant à l'infini, sur tout rayon vecteur, sauf sur ceux contenus dans un angle qui pouvait se fermer et se réduire à une demi-droite unique. L'école scandinave a continué; le point à l'infini de la fonction entière est devenu le point essentiel quelconque de la fonction uniforme te, pour approcher du monstre, il n'y a point de labyrinthe à démolir nécessairement; il faut, de manière beaucoup plus délicate, rechercher quelque nouveau fil d'Ariane.

Qu'on excuse cette comparaison, peut-être un peu trop lyrique; elle m'est venue naturellement en suivant la pensée toujours si claire et si élégante de M. Gaston Julia.

A. Buhl (Toulouse).

S. Lefschetz. — **L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique.** (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de VI-154 pages; 20 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Voici un ouvrage savant, très savant, continuant dignement les grands Mémoires dus à Henri Poincaré et le Traité des *Fonctions algébriques de deux variables* de MM. E. Picard et G. Simart. Les surfaces algébriques ont — comme les courbes algébriques d'ailleurs — une géométrie propre qu'on peut considérer au point de vue topologique pur. Mais, avec des variables complexes, on est si rapidement transporté dans des espaces où notre sentiment géométrique ordinaire est d'un secours à peu près nul qu'on se demande, tant qu'on n'est pas sorti de ces pures questions de topologie, ce qui sera finalement utilisé de cette redoutable géométrie. La réponse est du côté du calcul intégral.

C'est la théorie des intégrales, simples et doubles, de leurs périodes, de leurs types réduits qui ne va pas sans les préliminaires géométriques précédents, mais, tout de même, je conseillerai volontiers l'étude des intégrales bien avant que l'on ait débrouillé l'écheveau topologique. Certes, en procédant ainsi, on ne tardera pas à se heurter à des difficultés qu'on ne vaincra qu'en revenant à l'écheveau, mais on saura alors pourquoi l'on y revient et l'on verra que la complexité géométrique est conditionnée au fonds par des raisons analytiques relativement simples. C'est d'ailleurs l'ordre historique. Et ceci peut encore être vérifié par des résultats, dus à M. Lefschetz lui-même et relatifs aux courbes algébriques à considérer sur une surface; les résultats analytiques de Poincaré sur les intégrales doubles attachées à la surface, dans leurs relations avec les théorèmes abéliens relatifs aux courbes n'expriment précisément que des faits géométriques facilement saisissables.

Quand on en est là, on peut continuer sur les variétés algébriques à plus de deux dimensions et c'est l'occasion de reconnaître que la voie précédemment parcourue a bien acquis définitivement la forme la plus souhaitable au point de vue logique car, par exemple, sur les variétés les plus quelconques, on voit se dessiner la théorie des sous-variétés tout comme se dessinait d'abord celle des courbes sur les surfaces proprement dites. Plus on avance, plus on est payé de sa peine, car voici maintenant les fonctions abeliennes qui se construisent sans inversion en utilisant quelques théorèmes seulement