BIBLIOGRAPHIE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

BIBLIOGRAPHIE

Georges BOULIGAND. — **Leçons de géométrie vectorielle préliminaires à l'étude de la Théorie d'Einstein.** — Préface de M. Edouard GOURSAT. — Un vol. de VIII-356 pages; 25 fr.; Vuibert, Paris, 1924.

L'ouvrage que voici est d'un caractère éminemment original et synthétique; on peut passer sur les généralités du calcul vectoriel et faire un tableau des plus intéressants rien qu'avec les points où l'auteur a marqué, et combien nettement, son esprit personnel. Ainsi, dans la première partie, relative aux opérations vectorielles en géométrie linéaire, il faut noter l'introduction et la définition des déterminants d'ordre n par les propriétés de l'étendue définissable à l'aide de n vecteurs. C'est absolument dans la nature des choses et explique déjà partiellement pourquoi les méthodes einsteiniennes sont en rapport si étroit avec les déterminants: ceux-ci sont adéquats à une géométrie linéaire générale.

La Deuxième partie du livre a trait aux opérations vectorielles métriques; celles-ci reconstruisent la trigonométrie plane et sphérique, introduisent les formes bilinéaires et quadratiques, opposent deux multiplications, l'une scalaire, l'autre vectorielle, conduisent enfin aux réductions canoniques de la théorie des vecteurs glissants.

Mais c'est surtout dans la Troisième partie, traitant des opérations vectorielles infinitésimales, que nous allons avoir à nous arrêter et à méditer. La notion générale de dérivation géométrique conduit à l'extension vectorielle de la formule de Taylor; le cas où le paramètre variable est un arc de courbe gauche mène à la théorie complète de ces courbes (courbure, torsion, formules de Frenet, représentations sphériques, développées et développantes). Puis voici, dans le même ordre d'idées, les propriétés métriques des surfaces. Après le ds^2, on peut aborder les surfaces à ds^2 donné, c'est-à-dire les surfaces applicables, mais ici il faut insister particulièrement. Avec le premier ds^2, une surface n'est pas complètement connue; des dérivées géométriques secondes restent indéterminées en un point quelconque de la surface et c'est avec celles-ci que M. Bouligand forme une seconde forme quadratique (forme métrique externe) qui, supposée donnée, achève la détermination intrinsèque, pourvu que soient remplies trois conditions d'intégrabilité. Ceci doit évidemment être équivalent à la théorie des formes quadratiques fondamentales auxquelles sont associées les conditions bien connues de Gauss, Codazzi, Weingarten... mais l'auteur du présent livre a trouvé le moyen, sur ces points, d'être d'une brièveté des plus remarquables, toujours avec des formules courtes et facilement maniables.

La recherche d'une formule vectorielle qui serait l'image fidèle de la formule de Taylor montre assez les difficultés qui naissent de l'abus de symbolisme et qui limitent l'efficacité du Calcul vectoriel. On aperçoit ainsi la raison d'être du Calcul tensoriel. Enfin, les paramètres différentiels de la théorie des surfaces commencent à apparaître derrière des produits vectoriels d'une grande simplicité.

Voici maintenant les opérateurs à constitution différentielle qui — on sait que ce n'est pas un paradoxe — naissent volontiers sous des intégrales multiples: divergence, rotationnel, ∇ d'Hamilton et ∇^2 laplacien. Belle occasion de développer quelques généralités sur le potentiel newtonien.

Aux formules intégrales s'adjoint tout naturellement la notion de fonction de ligne, avoisinant celle de variation, développée, en particulier, par celle de géodésique. Ceci nous ramène à la courbure totale et à la courbure géodésique si esthétiquement liées en la formule d'Ossian Bonnet. Ce sont ces études de courbure qui nous conduisent jusqu'aux conceptions géométriques les plus récentes, celles relatives à l'étude d'une surface sur elle-même, sans considération de l'espace extérieur. Certes c'était le point de vue de Riemann avec le transport d'étalons flexibles, mais incontractiles et inextensibles; il est maintenant dépassé par l'étalonnage variable de H. Weyl. La partie principale du volume se termine alors par des comparaisons entre propriétés intrinsèques d'une surface et propriétés de l'espace ambiant mais c'est toujours la géométrie géodésique qui apparaît comme la plus naturelle et la plus féconde.

Trois Notes achèvent le volume. La première expose les principes du Calcul tensoriel avec un redressement des notations utilisées jusqu'ici; la contrevariance est indiquée par l'indice inférieur, comme dans x_i, et c'est alors la covariance qui s'accommode des indices supérieurs.

La seconde Note traite des multiplicités de Riemann à plus de deux dimensions; ici apparaît, dans toute la généralité, le déplacement parallèle de M. Levi-Cività avec lequel on arrive facilement aux tenseurs de courbure.

Les Principes de la Géométrie forment l'objet de la troisième Note. On y voit, avec Cayley, Hilbert, Poincaré, le caractère arbitraire des postulats, sans préjudice de l'impeccable enchaînement logique de leurs conséquences.

Je n'ai point d'éloges à faire après ceux dont M. E. Goursat a émaillé une belle et substantielle préface; l'étude du livre fera d'ailleurs comprendre à quel point ces éloges sont mérités.

A. Buhl (Toulouse).

N. B. — M. G. Bouligand prie *L'Enseignement mathématique* de signaler une erreur dont la rectification n'a pu être faite dans les premiers exemplaires mis en circulation.

Il s'agit des ombilics, n° 138, p. 147. Par un ombilic, il passe une infinité de *directions principales* mais non forcément de lignes de courbure. C'est ce qu'on aperçoit immédiatement dans le cas des quadriques. Voir, sur ce point, le tome III du *Traité d'Analyse* de M. Emile Picard, p. 231 de la seconde édition.

C. Burali-Forti et T. Boggio. — **Espaces courbes. Critique de la Relativité.** — Un vol. gr. in-8° de XXIV-256 pages; 50 lires; STEN, Editrice, (Società Tipografico-Editrice Nazionale). Turin, 1924.

Cet ouvrage émanant de deux savants bien connus est à coup sûr assez inattendu. Généralement les critiques contre les théories relativistes venaient de gens incapables de s'assimiler les mathématiques nécessaires à leur compréhension. Ici il semble que nous assistions à un fait contraire; le point de vue einsteinien est mathématiquement dépassé.

D'abord, je pense que les auteurs ne m'en voudront pas si je dis que l'étude de la partie mathématique de leur livre, si soigneusement et joliment présenté au point de vue matériel, m'a semblé fort difficile. J'ai le sentiment très net de n'y être parvenu que parce que je connaissais l'analyse einsteinienne; dès lors — première critique — quel gâchis cela ne va-t-il pas produire chez les pauvres d'esprit qui n'ont jamais rien compris à cette analyse, mais qui trouveront de bon goût de paraître emboîter le pas aux deux géomètres italiens ?

Mais quelle est l'idée scientifique fondamentale du volume ? Il m'a paru que, sous le nom d'homographie vectorielle, les auteurs construisaient une théorie linéaire, vectorielle et tensorielle, de prétentions extrêmement générales. Les invariances, covariances et contrevariances qui s'offrent naturellement, de la géométrie de Riemann aux théories d'Eisntein, s'en voient surajouter beaucoup d'autres et, une fois en présence de cet arsenal *logique*, dont toutes les parties ont, *logiquement*, un droit égal à la considération, les mêmes auteurs demandent de quel droit les einsteiniens croient voir quelque chose de définitivement acceptable dans leurs considérations, puisque celles-ci n'utilisent, *arbitrairement*, qu'une petite partie du matériel de l'arsenal.

Il me semble d'abord qu'on peut répondre — et ceci est un lieu commun — que l'Univers sensible n'aura jamais qu'un rôle minime — j'allais dire infinitésimal — par rapport à l'ensemble des Univers logiques. Ensuite, c'est bien la première fois que je vois prétendre que les généralisations d'une théorie détruisent celle-ci. En France, un géomètre de grand talent M. Elie Cartan, s'est avisé de déceler que, si les espaces einsteiniens sont diversement incurvés, ils sont, en revanche, toujours dépourvus de torsion et M. Cartan tente de généraliser la théorie dans l'espace tordu; toutefois, il n'en conclut pas au rejet du modèle simplement incurvé.

D'autre part, MM. Burali-Forti et Boggio n'aiment point l'espace-temps. Ma foi, on peut laisser de côté les discussions sur la réalité de cet espace et n'y voir qu'une image indéniablement commode. Un de nos plus savants relativistes de langue française, M. Th. De Donder, de Bruxelles, a déjà remarqué, voici plusieurs années, que les propriétés de l'espace-temps pouvaient se retrouver dans l'espace ordinaire pourvu d'ultra-électrons; la correspondance possible entre les deux choses ne lui a pas fait conclure que la première était sans valeur.

J'en ai dit assez, je crois, pour montrer que l'œuvre en litige pourra être incontestablement utile *auprès des savants*; ceux qui cherchent des généralisations de la gravifique einsteinienne y trouveront certainement des matériaux utiles, mais je doute fort qu'ils adoptent ensuite les vues purement négatives des logiciens de Turin.

Au point de vue historique, l'ouvrage est aussi fort digne d'estime, Il contient notamment un aperçu des recherches, de M. C. Somigliana. sur la transformation de Lorentz, laquelle remonterait à W. Voigt et à 1887. Une interprétation newtonienne en est possible et cela ne me gêne en rien. Mais pourquoi l'interprétation lorentzienne est-elle si gênante ? Partout, à moins de croire à l'absolu, il n'y a que formes et interprétations et quand Lorentz et Einstein nous montrent une méthode, *première en date*, qui unit l'électromagnétisme et les phénomènes gravitationnels, sans chercher à dissimuler ce qu'elle a d'arbitraire, ce ne sont pas d'autres correspondances, auxquelles on pense après coup, qui peuvent annihiler la valeur de l'algorithme initial. Il reste seulement à ordonner l'ensemble; je prétends que MM. Burali-Forti et Boggio y contribueront, car un livre comme le leur ne passera pas sans faire réfléchir utilement. Un point sur lequel ils ont eu nettement tort, c'est d'avoir pris texte de toutes les rêveries romantiques de prétendus vulgarisateurs; ces derniers ne méritent pas qu'on les combatte, car s'ils cultivent le paradoxe, pour l'amusement des incompétents, sur des terrains qui ne sont point ceux de la science, les véritables savants n'ont pas à s'occuper d'eux.

A. BUHL (Toulouse).

Gaston JULIA. — **Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé,** professées au Collège de France et rédigées par P. FLAMANT (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de VIII-152 p., 20 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Ces belles leçons se rapportent surtout à des théorèmes dont le prototype a été mis en lumière, en 1879, par M. Emile Picard. Il s'agit des équations analytiques, lesquelles possèdent *presque* fatalement des racines. Naturellement, il suffit qu'on soit amené à dire *presque* pour que le mathématicien étudie, avec acharnement, les cas où la prédiction générale ne se vérifie pas. Et, là comme ailleurs, ce sont surtout les cas singuliers, qui sont les plus dignes objets de science. M. E. Picard avait d'abord montré qu'à une fonction entière correspondait, au plus, une valeur finie que la fonction ne pouvait prendre; la démonstration s'appuyait sur la théorie de la fonction modulaire. M. E. Borel, tout en cherchant à généraliser l'assertion, avait voulu des démonstrations directes. MM. Landau, Carathéodory, Schottky ont pu passer de la fonction entière au cas plus général de la fonction simplement *uniforme* connue, au voisinage de l'origine, par un développement taylorien. Puis vient, dans l'ordre logique, le théorème général de M. Picard sur la fonction uniforme au voisinage d'un point essentiel et qui ne peut se refuser à prendre que deux valeurs au plus. C'est du côté des démonstrations que se manifeste peut-être le plus d'intérêt, à cause de la dualité indiquée. La théorie générale des fonctions doit certainement pouvoir se suffire à elle-même mais il est aussi bien intéressant de se demander si la fonction modulaire ne pourrait pas encore se prêter à des démonstrations généralisant celle donnée, en premier lieu, par M. Picard. Dans l'ouvrage de M. Gaston Julia, il semble que c'est surtout cette dernière méthode qui soit remise en honneur et le jeune et brillant auteur, après avoir rappelé brièvement les principes de la théorie des fonctions uniformes, a justement développé quelques généralités modulaires dont il se sert ensuite dans tout le cours de l'ouvrage, comme d'instruments d'une grande puissance.

Parmi les notions qui servent à approcher d'un point singulier, qu'on peut toujours prendre pour origine, signalons aussi celle de *famille normale* de fonctions, travaillée surtout par M. P. Montel. C'est l'étude de la suite dont le terme général est $f(\sigma^n z)$; cette suite, considérée dans une seule et même couronne, remplace l'étude de $f(z)$ dans des couronnes tendant à s'évanouir en O. Dans le cas des fonctions méromorphes, la méthode permet des dénombrements de pôles.

Les trois derniers chapitres de l'ouvrage seront peut-être les plus féconds comme laissant entrevoir un grand nombre d'applications, non toutes énumérées d'ailleurs. Il ne s'agit pas tant, pour percer le mystère du point singulier, de l'entourer étroitement de toutes parts que d'aller vers lui, par des chemins exceptionnels et habilement choisis. Déjà, M. G. Mittag-Leffler, dans ses élégantes recherches sur la sommabilité, avait besoin de fonctions entières s'annulant à l'infini, sur tout rayon vecteur, sauf sur ceux contenus dans un angle qui pouvait se fermer et se réduire à une demi-droite unique. L'école scandinave a continué; le point à l'infini de la fonction entière est devenu le point essentiel quelconque de la fonction uniforme te, pour approcher du monstre, il n'y a point de labyrinthe à démolir nécessairement; il faut, de manière beaucoup plus délicate, rechercher quelque nouveau fil d'Ariane.

Qu'on excuse cette comparaison, peut-être un peu trop lyrique; elle m'est venue naturellement en suivant la pensée toujours si claire et si élégante de M. Gaston Julia.

A. Buhl (Toulouse).

S. Lefschetz. — **L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique.** (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de VI-154 pages; 20 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Voici un ouvrage savant, très savant, continuant dignement les grands Mémoires dus à Henri Poincaré et le Traité des *Fonctions algébriques de deux variables* de MM. E. Picard et G. Simart. Les surfaces algébriques ont — comme les courbes algébriques d'ailleurs — une géométrie propre qu'on peut considérer au point de vue topologique pur. Mais, avec des variables complexes, on est si rapidement transporté dans des espaces où notre sentiment géométrique ordinaire est d'un secours à peu près nul qu'on se demande, tant qu'on n'est pas sorti de ces pures questions de topologie, ce qui sera finalement utilisé de cette redoutable géométrie. La réponse est du côté du calcul intégral.

C'est la théorie des intégrales, simples et doubles, de leurs périodes, de leurs types réduits qui ne va pas sans les préliminaires géométriques précédents, mais, tout de même, je conseillerai volontiers l'étude des intégrales bien avant que l'on ait débrouillé l'écheveau topologique. Certes, en procédant ainsi, on ne tardera pas à se heurter à des difficultés qu'on ne vaincra qu'en revenant à l'écheveau, mais on saura alors pourquoi l'on y revient et l'on verra que la complexité géométrique est conditionnée au fonds par des raisons analytiques relativement simples. C'est d'ailleurs l'ordre historique. Et ceci peut encore être vérifié par des résultats, dus à M. Lefschetz lui-même et relatifs aux courbes algébriques à considérer sur une surface; les résultats analytiques de Poincaré sur les intégrales doubles attachées à la surface, dans leurs relations avec les théorèmes abéliens relatifs aux courbes n'expriment précisément que des faits géométriques facilement saisissables.

Quand on en est là, on peut continuer sur les variétés algébriques à plus de deux dimensions et c'est l'occasion de reconnaître que la voie précédemment parcourue a bien acquis définitivement la forme la plus souhaitable au point de vue logique car, par exemple, sur les variétés les plus quelconques, on voit se dessiner la théorie des sous-variétés tout comme se dessinait d'abord celle des courbes sur les surfaces proprement dites. Plus on avance, plus on est payé de sa peine, car voici maintenant les fonctions abeliennes qui se construisent sans inversion en utilisant quelques théorèmes seulement d'Analysis Situs. Et voici encore les fonctions à multiplicateurs, les fonctions Θ, bref, en quelques pages, tout l'appareil abélien qui paraît acquérir une curieuse simplicité dans un cadre géométrique qu'il fallait savoir choisir.

Des notes terminent l'ouvrage; j'y remarque surtout les intégrales doubles *impropres*, qui étendues à des domaines finis s'expriment par des intégrales simples relatives au contour du domaine. Ce ne sont pas, au fond, de véritables intégrales doubles et, dans les classifications, il importe de les démasquer, ce qui ne va pas sans difficultés redoutables étudiées d'abord par M. Picard et réétudiées, encore très élégamment, dans le présent volume.

Bel ouvrage, à début sévère, mais à développements sûrs, puissants et féconds.

A. Buhl (Toulouse).

Paul Montel. — **Statique et Résistance des matériaux.** — 1 vol. in-8° de VI-276 pages et 138 figures; 30 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Ceci est le cours professé par M. P. Montel à l'Ecole nationale supérieure des Beaux-Arts, pour les élèves architectes, et il est vraiment curieux de voir comment l'analyste, s'adaptant aux besoins et aux habitudes de son auditoire, est devenu plus particulièrement géomètre, pour ne point dire artiste. Il nous donne, en effet, un très esthétique ouvrage avec de nombreuses et élégantes figures, peu de calculs, beaucoup d'exercices intéressants, le tout dirigé par un sens très sûr du procédé graphique.

Sans doute il faut savoir respecter la psychologie d'élèves à qui l'on ne pourrait montrer une intégrale sans leur faire croire que ce symbole appartient à des mathématiques transcendantales; aussi l'auteur n'a fait de l'intégration que sous forme graphique, décomposant généralement les aires quelconques en éléments rectangulaires approchés et combinant projections et moments en de faciles dynamiques et funiculaires. Les opérations relevant d'une technique à étudier et celles qu'imagineraient le simple bon sens ou l'habitude courante sont aussi traitées de manière uniforme, les premières profitant de la lumière d'apparence évidente qui s'attache aux secondes.

Signalons, comme particulièrement suggestives, la théorie des moments d'inertie avec des aperçus complets sur les axes et l'ellipse d'inertie, puis celle des forces proportionnelles aux éléments d'aire auxquels elles sont appliquées. Les courbes funiculaires ont d'ailleurs illustré le calcul différentiel, permettant d'introduire les dérivées premières et secondes et la recherche réciproque de leurs fonctions primitives toutes choses dont on fera ensuite l'usage le plus naturel dans la théorie des forces intérieures et de la flexion.

Vraiment l'ouvrage est heureux; il faut bien se garder de dire qu'il sera bienvenu de ces praticiens — dont la race tend d'ailleurs à disparaître — qui veulent pratiquer sans mathématiques, mais qu'il donnera l'esprit mathématique à ceux qui pensent surtout de manière visuelle, en dessinant et en traçant.

A. Buhl (Toulouse).

Michel PETROVITCH. — **Durées physiques indépendantes des dimensions spatiales.** — Une brochure in-8° de 32 pages, Imprimerie Jean Frey, Zurich; A. Blanchard, Paris, 1924.

Cet élégant opuscule revient sur une des questions les plus épineuses de la relativité restreinte. Les temps locaux particuliers à divers phénomènes sont-ils cependant compatibles avec l'existence d'un temps universel unique ? Il semble que l'on puisse répondre affirmativement pour plusieurs raisons. Ainsi, pour M. Bergson, les objets qui subissent la contraction de Lorentz ne sont pas modifiés intrinsèquement; il y a une perspective de la vitesse, de même qu'il y a une perspective de l'éloignement et, toujours de même, les temps locaux sont, en quelque sorte, des perspectives d'un temps unique et immuable. Quant à définir ce dernier, M. Petrovitch croit, avec Lipmann, qu'on pourrait s'adresser à des propriétés de la matière, absolument indépendantes de l'état de mouvement, telles la résistivité électrique. Il décrit, à cet égard, un dispositif expérimental qui présente d'intéressantes propriétés. Cette intervention de la matière, en relativité restreinte, n'est pas sans causer un certain malaise mais l'éminent professeur de l'Université de Belgrade voit certainement toutes les difficultés de la question et il a fait une tentative indéniablement intéressante en essayant d'accorder l'abstraction relativiste avec les idées d'un physicien tel que Lipmann.

A. BUHL (Toulouse).

Bertrand RUSSELL. — **Principes de Reconstruction sociale.** Traduit de l'anglais par E. de CLERMONT-TONNERRE. — Un vol. in-8° de 184 pages, 10 fr.; Payot, Paris, 1924.

Voici un livre qui, par son titre, ne paraît pas concerner notre Revue. Il en est autrement si l'on considère le nom de l'auteur et il devient alors intéressant de voir quelles sont les opinions sociales d'un logicien des mathématiques. Hélas, cette curiosité m'a apporté une grosse déception. Je ne connaissais pas du tout la personnalité de M. Russell, pas plus que je ne connais suffisamment les partis anglais pour voir dans lequel on doit exactement ranger l'auteur; mais, en France, il faudrait le placer dans ceux où il semble qu'on veuille changer jusqu'à la nature humaine elle-même et où l'on ne semble pas s'apercevoir que pour étudier, de façon *valable*, la millième partie des choses que l'on se propose de transformer et des répercussions que les transformations pourraient avoir, l'existence entière d'un homme très intelligent serait encore insuffisante. L'auteur ne disserte pas mal des mobiles humains quand il y voit surtout « désir » et « impulsion », choses qu'il distingue soigneusement. Qu'un peuple en attaque un autre, il y a impulsion (mauvaise, en général), mais si le peuple attaqué ne songe, sans réfléchir, qu'à courir aux armes et à lutter, il subit aussi une impulsion qui ne serait pas de beaucoup supérieure à la première !

Les idées concernant la propriété ne sont pas celles d'un propriétaire, chose qui est l'une des plus faciles à accepter, mais les idées familiales ne sont peut-être pas celles d'un bon père; la possibilité d'une disparition de la famille est envisagée.

Et cependant tout cela est très bien écrit, d'une tenue logique qui pourra séduire bien des esprits. Mais est-ce de la vraie logique ou du sophisme, ou de cette manie raisonnante si connue, si abondante dans les partis qui se déclarent « conscients » ? Je ne veux point conclure, préférant laisser ce soin à des lecteurs que je souhaite nombreux pour juger cette œuvre où le logicien paraît dominer trop exclusivement le philosophe.

A. BUHL (Toulouse).

Raoul BRICARD. — **Petit traité de perspective**. — 1 vol. grand in-8° de 88 p. et 62 fig., 8 fr.; Vuibert. Paris, 1924.

Ceci est un ouvrage à la fois court et très bien présenté. Imprimé sur du beau papier glacé, avec de nombreuses figures très soignées, il ne plaira pas moins aux artistes qu'aux géomètres. Il s'agit surtout de méthodes injustement méconnues dont Cousinery a indiqué le principe en 1828.

Les considérations géométriques essentielles portent le cachet intuitif évident que Monge savait leur donner en employant sans hésitation les figures spatiales pour la démonstration de théorèmes plans; ici, d'ailleurs, la chose est toute indiquée, car ceux qui étudient la perspective, en vue de ses applications, admettraient difficilement une introduction à deux dimensions qui leur paraîtrait bien abstraite.

Signalons des choses curieuses quant aux complaisances de l'œil qui rendent la perspective possible; un quadrilatère avec ses deux diagonales peut être vu, de deux autres manières, comme tétraèdre. La représentation plane du cube est plus étrange encore.

Il est fort intéressant de suivre l'auteur en ses distinctions projectives et métriques; ces adjectifs éveillent aujourd'hui l'idée de discussions élevées et philosophiques sur la nature même de l'espace. Or, ici, la métrique n'est que l'art du dessin suffisamment correct pour qu'on puisse y retrouver des mesures, des partages de segments, etc., qu'un métreur ferait machinalement dans l'espace réel. Seulement, comme c'est un géomètre de talent qui s'est occupé du problème, les clercs voient toujours comment celui-ci peut être élevé au dessus des nécessités de la pratique.

Signalons encore un chapitre sur la perspective cavalière, des indications sur la métrophotographie et un examen des cas où il est permis et même indiqué à l'artiste de ne pas s'en référer à une perspective géométrique absolument stricte.

Il y a donc, dans ce livre, de la rigueur pour le géomètre et de cet esprit d'interprétation qu'on ne saurait se proposer de bannir de l'art.

A. BUHL (Toulouse).

M. KRAITCHIK. — **Recherches sur la théorie des nombres**. Avec une préface de M. Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN. — 1 vol. in-8° (25×16) de XVI + 272 p., avec 4 grandes tables; Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1924.

Ce volume fait suite à l'ouvrage intitulé *Théorie des nombres*, que M. KRAITCHIK a publié il y a deux ans.

L'arithnomie occupe une place à part. Bien qu'Hermite ait conçu l'idée géniale d'y introduire des variables continues et que cette idée se soit révélée d'une très grande fécondité, liant d'une manière insoupçonnée la théorie des nombres à la théorie des fonctions, le domaine propre de l'arithmétique supérieur reste celui du nombre entier ; il est dès lors essentiellement discontinu. M. Kraïtchik en tout cas s'est placé franchement sur ce terrain et aborde directement les difficultés des problèmes arithnomiques Elles sont de nature particulière, à cause du caractère individuel de chaque nombre et de l'isolement, du moins apparent, des diverses questions. En effet, dans d'autres disciplines mathématiques, notamment en géométrie et en « fonctiologie », on a l'avantage de posséder deux puissants principes d'investigation : ce sont la généralisation et l'analogie. Or, ils n'ont que peu de prise en arithnomie, où chaque question exige des moyens particuliers et semble même former un tout à elle seule ; d'où la nécessité de créer des modes d'investigation spéciaux. Ils consistent en une série d'essais numériques propres à réaliser un véritable criblage ; c'est donc un recours à la méthode expérimentale, comme Hermite aimait à souligner. Le grand Euler en a donné l'exemple. M. Kraïtchik, fervent adepte de la nomographie, était bien placé, en sa qualité d'ingénieur à la Société financière des transports et d'entreprises industrielles, pour imaginer des procédés opératoires sûrs, faciles et rapides.

Prenons comme exemple le problème de la factorisation que M. Kraïtchik traite au chapitre VI de son ouvrage. Le tâtonnement étant inévitable dans ce genre de recherches, il s'agissait de le perfectionner. Euler, en introduisant les diviseurs linéaires de formes quadratiques, a réalisé à cet égard un sensible progrès, car on trouve en général assez facilement un certain nombre de décompositions quadratiques d'un nombre donné n, et comme les diviseurs de n doivent aussi diviser ces formes quadratiques, on ne devra les chercher que parmi les diviseurs linéaires de ces formes. Il en résulte un procédé de criblage qui n'est limité que par l'étendue de la table dont on dispose. Cette table, commencée par Euler, continuée par Legendre, étendue par Tchebycheff jusqu'au déterminant D = 101, M. Kaïtchik l'a poussée dans sa *Théorie des nombres* jusqu'au déterminant D = 200, en corrigeant, fait méritoire, nombre d'erreurs de ses devanciers. Dans ce nouveau volume des *Recherches*, il poursuit la table jusqu'au déterminant D = 250 (table III), en modifiant et simplifiant la disposition adoptée avant lui, ce qui lui permet de réduire très notablement la place occupée par ladite table III. On doit encore à la sagacité de M. Kraïtchik et à son travail persévérant un grand nombre de décompositions de nombres de Mersenne $2^n - 1$, de nombres de Fermat $2^n + 1$, et d'autres nombres de forme particulière, ainsi que d'ingénieux procédés de factorisation.

Je ne saurais passer sous silence la table IV de son ouvrage. Elle occupe plus de 50 pages et contient les indices de tous les nombres premiers < 100 pour tous les modules $< 10\,000$. Elle est « le fruit d'un labeur dont l'étendue donne le vertige «, dit M. de la Vallée Poussin. On sait qu'une table d'indices peut rendre en arithnomie les services qu'on demande à une table de logarithmes pour les calculs numériques. La table I (p. 131-191) contient : 1° les nombres premiers $P < 300\,000$; 2° et 3° la plus petite solution des congruences $2^x \equiv 1$ (*mod* P) et $10^y \equiv 1$ (*mod* P) pour tous ces nombres premiers $P < 300\,000$; 4° et 5° les nombres $\gamma = (P\text{-}1) : x$ et $\gamma' = (P\text{-}1) : y$; enfin 6° une racine primitive ϱ de P pour toutes les valeurs de $P < 27\,457$. La table II (13 pages) donne tous les nombres premiers de la forme $512\,k + 1$ inférieurs à dix millions, leur décomposition en $P = x^2 + y^2$ ou en $P = z^2 + 2t^2$ ou en $P = u^2 + 3v^2$, lorsque ces décompositions additives sont possibles ; enfin la plus petite solution de la congruence $2^x \equiv 1$ (*mod* P) et la valeur de $\gamma = \dfrac{P - 1}{x}$ pour les mêmes nombres premiers

$P < 10^7$. Ces quatre grandes tables constituent la deuxième partie des *Recherches*.

La première partie présente un caractère fragmentaire et contient principalement des compléments à la *Théorie des nombres* du même auteur. Ce sont en effet les mêmes questions qui sont traitées : Identités et généralités (chapitres I et II), Congruences du premier et du second degré (chapitres III et IV), congruences binômes (ch. V) ; factorisation (ch. VI) ; dans le chapitre VII, où les équations binômes sont traitées d'une manière originale, l'exposition revêt un caractère plus systématique. Cette première partie fourmille de tables dont quelques-unes s'étendent sur plusieurs pages. Si l'on ajoute à la seconde partie, qui contient en réalité 11 tables sous forme condensée, les 21 tables éparses dans le texte de la première partie, on arrive au total de 32 tables dressées par M. Kraïtchik lui-même. Il faut y ajouter une foule de renseignements très curieux sur la partition des nombres et une quantité de détails, trop nombreux et trop complexes pour pouvoir être résumés en une courte analyse. On le voit, l'abondance des documents réunis par l'auteur est vraiment imposante, et ces deux livres, qui rendront des services signalés aux arithméticiens, ne devraient manquer dans aucune bibliothèque mathématique.

L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel).

Niels Nielsen. — **Traité élémentaire des nombres de Bernoulli.** — 1 vol. grand in-8° de X+399 p.; 50 fr.; Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1923.

On sait que Jacques Bernoulli, dont le nom est indissolublement lié au Calcul des probabilités par la loi des grands nombres, a introduit dans son fameux ouvrage posthume sur L'Art de conjecturer, *Ars conjectandi*, publié en 1713, une suite infinie de nombres rationnels particuliers devenus célèbres en analyse mathématique. Le grand Euler les a retrouvés à son tour et popularisés sous le nom de nombres de Bernoulli, se servant de l'initiale de ce nom pour les désigner, et sa notation

$$B_1 = \frac{1}{6}\,, \qquad B_2 = \frac{1}{30}\,, \qquad B_3 = \frac{1}{42}\,, \qquad B_4 = \frac{1}{30}\,, \qquad B_5 = \frac{5}{66}\,, \ldots$$

a acquis droit de cité en mathématiques. Une pléiade de mathématiciens, parmi lesquels les plus grands géomètres et calculateurs, les Cauchy, Gauss, Hermite et Kronecker, les Jacobi, Lipschitz, Lucas, de Moivre, les Raabe, Saalschütz, von Staudt, Stern, Sylvester, etc., se sont occupés de ces curieux nombres, de sorte qu'il y a une littérature assez étendue sur ce sujet spécial M. Niels Nielsen de l'Université de Copenhague, à qui l'on doit plusieurs ouvrages importants et de nombreuses monographies sur la Théorie des fonctions, était bien placé pour coordonner ce que l'on sait des nombres de Bernoulli, puisqu'il a mis depuis quelques années sa vaste érudition mathématique plus spécialement au service de la Théorie des nombres. Les 400 pages de son « Traité élémentaire des nombres de Bernoulli » comprennent vingt chapitres, dont les deux premiers sont consacrés à des formules et théorèmes auxiliaires relatifs aux propriétés des fonctions rationnelles entières, à l'indicateur d'Euler $\varphi(n)$ et au calcul des différences finies, notamment aux propriétés des opérations Δ, δ, D, où

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)\,, \quad \delta f(x) = f(x) + f(x-1) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

dont M. Nielsen définit et étudie les puissances positives et négatives. Puis il étudie ce qu'il appelle les polynomes « harmoniques »

$$f_n(x) \equiv \frac{a_0 x^n}{n!} + \frac{a_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{a_{n-1} x}{1!} + \frac{a_n}{0!}$$

et les « suites harmoniques » (envisagées pour la première fois, avec une légère modification, par M. P. Appell, en 1880):

$$f_0(x)\ , \quad f_1(x)\ , \quad f_2(x)\ , \dots , \quad f_n(x)\ , \dots \tag{1}$$

Les *fonctions de Bernoulli* $B_0(x)$, $B_1(x)$, ..., $B_\lambda(x)$, ... s'introduisent alors comme éléments d'une suite harmonique particulière satisfaisant à l'équation aux différences finies

$$\Delta B_n(x) \equiv B_n(x) - B_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n \geqq 1) \tag{2}$$

M. Nielsen en déduit sans difficultés, par voie élémentaire, l'expression générale de $B_n(x)$, et pour les nombres de Bernoulli B_λ la formule de récurrence donnée déjà par Jacques Bernoulli lui-même

$$\frac{p-1}{2} = \sum_{s=1}^{\leqq \frac{1}{2}(p-1)} (-1)^{s-1} \cdot \binom{p+1}{2s} \cdot B_s \tag{3}$$

ainsi que cette autre formule récursive trouvée par Euler:

$$(2p+1) \cdot B_p = \sum_{s=1}^{p-1} \binom{2p}{2s} \cdot B_s \cdot B_{p-s} \tag{4}$$

Au lieu du symbole Δ qui indique formation d'une différence, M. Nielsen prend ensuite le symbole δ qui indique formation d'une somme. Ce sont alors les *fonctions d'Euler*

$$E_0(x)\ , \quad E_1(x)\ , \quad E_2(x)\ , \quad \dots , \quad E_n(x)\ , \quad \dots$$

qui s'introduisent comme éléments d'une suite harmonique particulière (1), satisfaisant à l'équation aux différences finies analogue à (2)

$$\delta E_n(x) \equiv E_n(x) + E_n(x-1) = \frac{x^n}{n!} \quad (n \geqq 0) \tag{5}$$

M. Nielsen en déduit sans difficultés, par voie élémentaire, l'expression générale de $E_n(x)$ et pour les nombres E_λ, appelés *nombres d'Euler*, la formule de récurrence analogue à (3)

$$\sum_{s=0}^{\lambda-1} (-1)^s \cdot \binom{2\lambda}{2s} \cdot E_{\lambda-s} = (-1)^{\lambda-1} \tag{6}$$

due à Euler. Celui-ci a déjà calculé $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, $E_4 = 1385$, etc. jusqu'à E_9, qui est un nombre de 9 chiffres. A cette occasion s'introduisent les nombres T_n, généralement appelés « coefficients des tangentes », pour lesquels

$$T_{p+1} = \sum_{s=0}^{p-1} \binom{2p}{2s+1} \cdot T_{s+1} \cdot T_{p-s} \quad (p \geqq 1) \tag{7}$$

analogue à la formule de récurrence (4). Ces nombres $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 16$, $T_4 = 272$, etc., croissent aussi rapidement que les nombres d'Euler.

Qu'on veuille bien remarquer le caractère élémentaire de ces déductions.

J'ai donné quelques développements pour faire ressortir la symétrie qu'on peut introduire dans cet exposé, puis aussi pour faire comprendre l'originalité du livre de M. Nielsen. Voici en effet ce qui s'est passé historiquement.

C'est en étudiant le développement des fonctions trigonométriques ctg x, tg x, cosec x en séries de puissances qu'Euler retrouva les nombres de Bernoulli. C'est donc par des considérations transcendantes qu'il démontra plusieurs belles propriétés de ces nombres. Les géomètres, s'inspirant de l'exemple d'Euler, appliquèrent presque exclusivement des méthodes transcendantes dans leurs recherches sur ces nombres rationnels, exceptés von Staudt et von Ettingshausen. De nos jours encore, on a l'habitude de rattacher les nombres de Bernoulli aux fonctions exponentielles ou trigonométriques et de démontrer leurs propriétés par des identités où figurent ces fonctions transcendantes. La formule récursive de Jacques Bernoulli, formule (3) ci-dessus, tomba entièrement dans l'oubli, si bien qu'on attribue à de Moivre et à Jacobi les premières formules récursives pour ces nombres, et pourtant elles ne sont que des cas particuliers de celle de Bernoulli. Frappé de ce fait, M. Nielsen a voulu écrire un traité « élémentaire » où il se passe des fonctions transcendantes, c'est ce qui fait son originalité. A l'aide des notions ci-dessus rappelées et de quelques autres tout aussi élémentaires, M. Nielsen étudie la différence $B_m(x+p) - B_m(x)$ et déduit d'un seul coup 32 formules de récurrence comme cas spéciaux de la formule de Bernoulli. La plupart d'entre elles étaient déjà connues, mais démontrées par des méthodes transcendantes très différentes et compliquées.

M. Nielsen base sa théorie élémentaire sur l'équation fondamentale

$$f(-x-1) = \pm f(x) . \tag{8}$$

Il démontre que les fonctions de Bernoulli et d'Euler satisfont à cette équation. Il appelle polynome « symétrique », toute fonction rationnelle entière satisfaisant à (8). La notion de suite « régulière », celle de « fonction partielle » et l'ingénieuse notion de « rang d'un nombre premier » permettent à M. Nielsen d'établir une très grande quantité de relations, dont beaucoup sont nouvelles, entre les B_n, les E_n et les T_n, ou les fonctions correspondantes. Il relève en cours de route plusieurs erreurs de ses prédécesseurs. De nombreuses applications sont faites aux nombres B_n, E_n et T_n eux-mêmes, puis aux sommes S_n des puissances semblables des nombres naturels, ou des racines d'une équation algébrique, puis aux sommes correspondantes σ_n où lesdites puissances semblables sont prises avec des signes alternativement + et —, puis à des équations algébriques de forme particulière, enfin à la Théorie des nombres.

Je regrette de ne pas trouver, dans un livre de cette envergure, des résultats numériques aussi complets que possible. Ainsi, les S_n ont été calculés jusqu'à S_{16} et les nombres de Bernoulli jusqu'à B_{92}, mais M. Nielsen ne donne la liste que jusqu'à S_{10} et B_{16}. Bien que « élémentaire », le Traité de M. Nielsen sur les nombres de Bernoulli conduit le lecteur assez avant dans certaines branches de l'arithnomie, comme l'indique déjà le titre des derniers chapitres.

Le chapitre 13 : « De la nature des nombres de Bernoulli », contient, entre autres, les célèbres théorèmes de von Staudt et de Clausen ; chapitre 14 : « Les congruences de Kummer »; chapitre 17 : « Les coefficients de factorielles » ; chapitre 19 : « Des quotients de Fermat »; chapitre 20 : « Des résidus quadratiques ».

Les indications bibliographiques sont très nombreuses et exactes. Je n'ai relevé que très peu de fautes d'impression, aucune dans les formules. Le lecteur trouve dans le traité lui-même toutes les définitions et tous les théorèmes nécessaires à la compréhension entière du texte. C'est le Traité le plus complet et le meilleur que je connaisse sur les nombres de Bernoulli et les domaines connexes, et il convient d'en féliciter M. Niels Nielsen.

L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel).

R. Marcolongo. — **Relativita**, seconda edizione riveduta ed ampliata. — 1 vol. in-8° de XII+235 p , 30 l.; Casa Editrice Giuseppe Principato, Messina, 1923.

Nous avons déjà dit l'intérêt que présente la première édition de ce livre. Il comprend l'exposé indispensable du calcul différentiel absolu, puis les théories restreinte et générale de la relativité, développées surtout au point de vue de la mécanique ; enfin un appendice consacré à une étude de la géométrie des espaces de Riemann.

Dans la seconde édition, le calcul différentiel absolu est plus développé, une brève allusion à la théorie du déplacement parallèle de M. Levi-Civita a été placée dans l'étude géométrique des variétés de Riemann et le livre se termine par un résumé de la théorie sans développements mathématiques.

Dans la seconde préface, M. Marcolongo nous laisse espérer, malgré un deuil qui l'a vivement affecté, qu'un exposé du problème cosmologique, une étude du champ électro-magnétique et de son interprétation dans les géométries de MM. Weyl et Eddington sortira de sa plume ; souhaitons vivement qu'il en soit ainsi.

Rolin Wavre (Genève).

R. Marcolongo. — **Meccanica Razionale** Vol. I : cinematica-statica, XV+325 p.; vol. II : dinamica-meccanica dei sistemi deformabili, XII+414 p. Terza edizione; lire 12,50 et 16,50. — Ulrico Hœpli. Milano, 1923.

Ce traité de mécanique rationnelle fait partie de la collection des « Manuels Hœpli », qui comprend, comme on sait, déjà d'excellents traités de mathématiques supérieures, de physique, etc. Le savant professeur de mécanique de l'Université de Naples y donne un exposé très complet, en même temps que très concis, des principaux sujets de la mécanique. Je ne le recommanderais pas à l'étudiant qui, pendant un examen, souffre de quelque amnésie, mais bien à ceux qui voudraient avoir de la mécanique un aperçu synthétique. Rolin WAVRE (Genève).

T. LEVI-CIVITA e V. AMALDI. — **Lezione di meccanica razionale**. *Volume primo. Cinematica, principi e statica.* — 1 vol. in-8° de XIII+741 p. 65 lire ; Nicola Zanichelli. Bologna, 1923.

Les deux auteurs de ces leçons se sont fait , en analyse et en mécanique, une réputation sur laquelle il est inutile d'insister ; rappelons simplement que M. Levi-Civita s'est illustré par ses recherches sur le problème restreint des trois corps en mécanique classique et en relativité par ses travaux d'ordre géométrique et par son calcul tensoriel.

Il est curieux de constater que c'est au moment où la mécanique classique est théoriquement abandonnée que paraissent le plus grand nombre de traités où il n'est question que d'elle ! Faut-il s'en étonner ? Nullement, l'étude de la mécanique classique constitue la meilleure initiation aux conceptions d'Einstein et de plus elle est pratiquement indispensable. On sait en effet à quelles difficultés conduit la résolution dans la mécanique relativiste de problèmes dont la solution était élémentaire dans l'ancienne mécanique. Mais l'exposé de la théorie classique doit s'inspirer des idées nouvelles dans ce sens que certains chapitres qui forment le seuil de la nouvelle mécanique doivent être spécialement développés; l'article que M. Levi-Civita a publié il y a quelques années dans ce périodique le prouve suffisamment.

Les leçons que publient aujourd'hui MM. Levi-Civita et Amaldi sont tout entières conçues dans le cadre de l'ancienne mécanique; elles présentent un très grand intérêt par leur caractère élémentaire tout d'abord, puis par le soin apporté à l'exposé des principes ainsi qu'aux multiples applications à l'astronomie, à la physique et à la technique, c'est-à-dire à l'art de l'ingénieur. A la fois intuitives et rigoureuses, ces leçons ont une très grande valeur didactique, à laquelle on ne parvient que par une grande pratique de l'enseignement. Il faut remettre cent fois son ouvrage sur le métier avant d'arriver à l'exposé qui ne laisse rien à désirer; ce livre fait foi de la grande expérience acquise par ses auteurs, dont le premier enseigna la mécanique durant vingt ans à Padoue, puis à Rome, le second à Modène, puis à Padoue.

Un second volume sera consacré à la dynamique du point, des systèmes et à la mécanique des systèmes continus. Rolin WAVRE (Genève).

C.-H. MÜLLER u. G. PRANGE. — **Allgemeine Mechanik** (Grundlegende Ansätze und elementare Methoden der Mechanik des Punktes und der Punktsysteme. Eine Einführung für Studierende der Natur-und Ingenieur-Wissenschaften. — 1 vol. in-8° de 561 p.; Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hanover.

Nous ne saurions dire assez de bien de ce livre. Les auteurs s'y sont efforcés de ne pas faire appel à des connaissances mathématiques dépassant celles que possèdent un étudiant sortant d'une école technique; sur certains points cependant, ils nous paraissent avoir dépassé ce niveau de connaissance, en particulier dans les paragraphes en petit caractère. Par mécanique générale, il faut entendre en somme ce noyau de théories mécaniques qui ont, d'une part, des extensions théoriques, et d'autre part des applications pratiques, à l'astronomie, à la physique et à l'art de l'ingénieur.

Nos auteurs exposent la théorie élémentaire et les principes fondamentaux du mouvement du point et des systèmes de points, ainsi que la mécanique différentielle, c'est-à-dire la mécanique analytique. Entre ces chapitres fondamentaux se trouvent, en petits caractères, de fort intéressantes applications des théories générales à plusieurs questions concernant la géométrie, l'astronomie et la physique. Pour en donner une idée, qu'il me suffise d'indiquer qu'à propos de la théorie du mouvement d'un point sur une surface, une ample allusion est faite à la théorie des surfaces jusqu'à obtenir les symboles de Christoffel, les équations des géodésiques mises sous forme tensorielle et jusqu'à la théorie du déplacement parallèle selon Levi-Cività; à propos de la dynamique des systèmes de points, le problème des trois corps est traité dans la mesure où il peut l'être sans avoir recours à un instrument mathématique trop complexe.

MM. Müller et Prange ont évité de traiter dans le présent livre les questions où intervient le calcul des variations (on sait que M. Prange a fait d'intéressantes recherches dans ce domaine). Nous pensons, néanmoins, que si ce livre est à la portée de ceux qui ne sont pas spécialisés en mathématiques, c'est à cause de la peine que se sont données ses auteurs pour exposer les questions sous le jour le plus intuitif, plutôt que par la simplicité de l'appareil mathématique.

Signalons, pour terminer, que la mécanique newtonienne est présentée de la même manière qu'elle a été développée dans l'histoire. Il y a certainement avantage quand cela est possible à rapprocher l'ordre didactique de l'ordre historique.

Rolin Wavre (Genève).

M. Lecat. — **Bibliographie de la relativité,** suivie d'un appendice sur les déterminants à plus de deux dimensions, le calcul des variations, les séries trigonométriques et l'azéotropisme. — 1 vol. in-8° de 290 et 47 p.; 90 fr.. — M. Lamertin, Ed., Bruxelles.

La littérature de la relativité compte déjà de nombreux traités dans toutes les langues et un nombre considérable de mémoires et d'articles de revues. Il faut savoir gré à M. Lecat d'avoir entrepris, en collaboration avec Mme Lecat-Pierlot, la publication d'un catalogue méthodique.

Ce recueil comprend trois listes principales. La première, procédant par *ordre alphabétique d'auteurs*, donne les titres des ouvrages et mémoires, avec l'indication des périodiques. La seconde contient la *table alphabétique des recueils* cités avec la mention, par leur numéro, des articles cités dans la première liste. Dans la troisième, où tout est abrégé, le classement, autant que possible, est *chronologique* et l'on y renvoie également à la table I.

Un *Appendice* est consacré aux matières de quelques-uns des travaux antérieurs de M. Lecat : Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions et compléments de bibliographie du calcul des variations, des séries trigonométriques et de l'azéotropisme.

L. Picart. — **Astronomie générale** (Collection Armand Colin). — 1 vol. in-16, 188 p. 42 fig., broché, 6 fr. ; Librairie Armand Colin, Paris.

Du jour où s'est éveillée sa conscience, l'Homme a été captivé par le grandiose spectacle de la voûte céleste, et il a cherché à pénétrer le secret de ses mouvements et des forces mystérieuses qui entraînent les astres. De là est née l'Astronomie, cette mère antique de toutes les sciences.

Depuis, beaucoup de mystères se sont éclaircis ; mais nous n'en avons pas moins tous conservé une curiosité très vive pour les choses du ciel. C'est pour satisfaire cette curiosité que M. Luc Picart a écrit son livre. Laissant à d'autres le soin de disserter sur la question de savoir s'il y a des hommes dans la Lune ou des terrassiers sur la planète Mars, il s'est borné à faire vraiment de l'Astronomie à l'usage de ceux qui désirent connaître d'une façon précise les lois de l'évolution des mondes.

Qu'on se rassure, cependant ! Si M. Luc Picart fait souvent appel aux données mathématiques, il n'en abuse pas et sa mathématique est accessible à tous ceux qui ont reçu une bonne instruction élémentaire.

Voilà, enfin, un livre d'Astronomie qui est de bonne, de saine vulgarisation, et ce n'est pas là un mince éloge.

C. Runge et H. König. — **Vorlesungen über numerisches Rechnen** (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XI). — 1 vol. in-8° de 371 p., avec 13 fig. ; 3 dollars 95 ; Julius Springer, Berlin.

Cet ouvrage constitue un excellent guide pour tous ceux qui désirent s'initier aux calculs numériques que le mathématicien, le physicien ou l'astronome peuvent avoir à effectuer dans la pratique. Il correspond aux leçons faites à l'Université de Gœttingue, depuis 1904, d'abord par M. Runge, puis aussi par M. König. A cet enseignement théorique se rattachent des travaux pratiques permettant de familiariser les étudiants avec les instruments à calculer.

Voici les principaux objets exposés par les auteurs :

Le calcul numérique et ses moyens auxiliaires. — Equations linéaires. — Méthode des moindres carrés. Théorie des erreurs. — Fonctions rationnelles entières. Interpolation. — Emploi des séries. — Equations à une inconnue. Méthodes d'approximation. — Equations à plusieurs inconnues. — Valeur approchée d'une fonction arbitraire dans un intervalle donné. Série de Fourier. Analyse harmonique. — Intégration et différentiation numérique. — Intégration numérique d'équations différentielles. — Résolution des exercices proposés dans les divers chapitres.

L.-P. Siceloff et D.-E. Smith. — **College Algebra** (Wentworth-Smith Mathematical Series). — 1 vol. in-8° de 258 p. ; 1 dollar 80 ; Ginn and Co., Boston.

La Collection Wentworth-Smith vient de s'enrichir d'un nouveau manuel d'algèbre destiné plus particulièrement à ceux qui ont besoin des mathématiques en vue des applications. Après une revue rapide des premiers éléments (opérations algébriques, équations du premier et du deuxième degré, progressions, binomes, logarithmes), les auteurs présentent, accompagnées de nombreux exercices, les notions essentielles relatives à l'analyse combinatoire, au calcul des probabilités, aux nombres complexes, à la théorie des équations et aux déterminants.

Dans une dernière partie, ils exposent la décomposition des fractions rationnelles, les intérêts composés et les annuités, les inégalités et les premières notions sur les séries.

H. F.