

# SUR L'INVERSION DES PRODUITS ARITHMÉTIQUES

Autor(en): **Bell, E. T.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19747>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR L'INVERSION DES PRODUITS ARITHMÉTIQUES

PAR

E. T. BELL (Seattle, Wash.)

---

1. — Dans une étude sur les travaux arithmétiques de Gauss, M. A. AUBRY<sup>1</sup> observa que la formule

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \dots = \varphi(n) ,$$

où  $a, b, \dots$  sont tous les diviseurs de l'entier  $n$ ,  $\varphi(n)$  étant la fonction d'Euler, « semble avoir donné le signal de la découverte d'une foule de relations arithmétiques qu'il y aurait grand intérêt à réunir et à rapprocher ». Je crois avoir rempli ce desideratum avec une algèbre symbolique que je construisis en 1915, et que je simplifiai dans quelques notes et articles parus plus tard<sup>2</sup>. Cette algèbre donne le moyen immédiat de réaliser l'idée de M. Aubry pour un corps quelconque d'éléments ayant une loi de résolution unique en facteurs irréductibles, soit par exemple le corps des entiers rationnels ou les idéaux d'un corps algébrique donné. On peut appliquer d'une façon immédiate les principes extrêmement simples de cette algèbre pour réunir et augmenter encore le nombre des relations entre les fonctions numériques trouvées, et dont un exposé a été donné par M. DICKSON dans son *History of the Theory of Numbers* (tome 1, chapitres 5, 10, 19).

Dans la présente Note j'applique des principes de la même espèce à l'inversion des produits

$$\prod_n [f(d)]^{g(d)} ,$$

---

<sup>1</sup> *L'Enseignement mathématique*, tome 11 (1909), p. 438-439.

<sup>2</sup> Voir, par exemple, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 27, pp. 330-332; *Transactions* (of the A. M. S.), vol. 25, pp. 135-154.

où le II s'étend à tous les couples  $d, \delta$  de diviseurs conjugués de l'entier  $n$ , et où  $f, g$  sont des fonctions numériques quelconques. Comme cas très spécial de l'inversion générale on trouve une formule importante de Dedekind.

2. — Rappelons quelques principes simples de la méthode citée. Soit  $n$  un entier quelconque  $> 0$ , et  $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$  des fonctions numériques. Posons symboliquement la somme

$$\Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) \dots f_r(d_r) ,$$

où  $\Sigma_n$  s'étend à tous les systèmes  $(d_1, d_2, \dots, d_r)$  de  $r$  entiers  $> 0$  dont le produit est  $n$ , égal au produit symbolique

$$f_1 f_2 \dots f_r ,$$

de sorte que

$$\Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) \dots f_r(d_r) \equiv f_1 f_2 \dots f_r .$$

On voit sans peine que le produit symbolique  $f_1 f_2 \dots f_r$  reste invariant sous toutes les permutations de  $f_1, f_2, \dots, f_r$ . Ainsi cette multiplication symbolique est commutative. Elle est aussi associative. Par exemple

$$\begin{aligned} f_1(f_2 f_3) &= \Sigma_n [f_1(d) \Sigma_{\delta} f_2(\delta_1^1) f_3(\delta_2^1)] (n = d\delta, \delta = \delta_1 \delta_2) , \\ &= \Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) f_3(d_3) \quad (n = d_1 d_2 d_3) , \\ &= f_1 f_2 f_3 . \end{aligned}$$

L'unité de cette multiplication est la fonction  $\eta$ , où

$$\eta(1) = 1 , \quad \eta(n) = 0 , \quad (n > 1) ;$$

car on a  $\eta f = f$ ,  $f$  étant une fonction numérique quelconque.

La fonction  $f'$  telle que

$$ff' = \eta$$

est unique quand  $f$  est donnée.

Je l'ai nommée la fonction réciproque de  $f$ .

Soient  $f_1, f_2, \dots, g_1, g_2, \dots, h_1, h_2, \dots$  des fonctions numériques telles que

$$f_1 f_2 \dots f_r g_1 g_2 \dots g_s = h_1 h_2 \dots h_t .$$

Le produit  $g_1 g_2 \dots g_s$  est une fonction numérique, soit  $g$ ; ainsi de même pour  $h_1 h_2 \dots h_t$ , soit  $h$ . Soit  $g'$  la fonction réciproque de  $g$ , de sorte que  $gg' = n$ , et posons

$$hg' \equiv \frac{h}{g}$$

symboliquement, par analogie avec l'arithmétique ordinaire. Donc, de la relation donnée on tire

$$f_1 f_2 \dots f_r = \frac{h_1 h_2 \dots h_t}{g_1 g_2 \dots g_s}.$$

Ces fonctions symboliques ont toutes les propriétés multiplicatives des fractions arithmétiques. Ainsi, par exemple, la multiplication indiquée par  $\times$  étant symbolique au sens de cette algèbre, on a

$$\frac{f_1 f_2 \dots f_r}{g_1 g_2 \dots g_s} \times \frac{g_1 g_2 \dots g_s}{h_1 h_2 \dots h_t} = \frac{f_1 f_2 \dots f_r}{h_1 h_2 \dots h_t}.$$

3. — Pour étendre l'isomorphisme j'écris symboliquement

$$\prod_n [f(d)]^{g(\delta)} \equiv f^g. \tag{1}$$

Soient maintenant  $f(n)$ ,  $g(n)$ ,  $h(n)$ ,  $k(n)$  des fonctions numériques telles que

$$f^g = h^k, \tag{2}$$

et soit  $g'$  la fonction réciproque de  $g$ , et  $k'$  celle de  $k$ . Donc, je dis,

$$f^{k'} = h^{g'}, \tag{3}$$

en analogie complète avec l'algèbre ordinaire.

Pour démontrer (3), on obtient de (2)

$$\sum_n g(\delta) \log f(d) = \sum_n k(\delta) \log h(d),$$

ou, si l'on pose  $\log f(n) = F(n)$ ,  $\log h(n) = H(n)$ ,

$$gF = kH.$$

Multiplions symboliquement cette identité par  $\varphi$ , où  $\varphi$  est une fonction numérique arbitraire. Donc

$$\varphi g^F = \varphi kH,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$f^{\varphi g} = h^{\varphi k}.$$

Soit maintenant  $\varphi$  la fonction spécifique  $g'k'$ . Donc  $\varphi g = k'$ ,  $\varphi k = g'$ , et on a (3).

L'inversion de Dedekind est le cas spécial où  $g = u$ ,  $k = \eta$ , et  $u(n)$  est la fonction numérique

$$u(n) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Car la fonction réciproque de  $\eta$  est  $\eta$  elle-même, et la fonction réciproque de  $u$  est la fonction  $\mu$  de Möbius, où  $\mu(n) = 0$  quand  $n$  contient un facteur premier à une puissance  $> 1$ , et  $\mu(n) = 1$  ou  $-1$ , selon que  $n$  est le produit d'un nombre pair ou impair de facteurs premiers distincts. Dans ce cas (2), (3) deviennent

$$f^u = h^\eta, \quad f^\eta = h^\mu,$$

ou, en forme non-symbolique,

$$\prod_n f(d) = h(n), \quad f(n) = \prod_n [h(d)]^{\mu(d)}.$$

University of Washington.