

§ 1. — Etude sommaire de quelques cubiques planes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur une surface donnée, on considère des points et des lignes remarquables. Citons les ombilics, les points paraboliques, les points singuliers, les lignes de courbure, les lignes de courbure totale constante, les géodésiques. Ces lignes et ces points ne sont pas distribués d'une façon quelconque.

Nous nous proposons d'appliquer la symétrie cristallographique à l'étude de certaines surfaces. Cette symétrie nous donnera d'utiles renseignements sur la répartition des propriétés géométriques.

Nous poursuivons un double but:

1^o montrer les avantages qui peuvent résulter de cette méthode pour la description d'une surface particulière;

2^o faire voir que cette méthode pourrait servir de base à une classification rationnelle des surfaces.

Nous nous adressons à la fois à des géomètres et à des cristallographes. Nous rappellerons le plus brièvement possible les définitions fondamentales de la géométrie et de la cristallographie.

Dans le premier chapitre nous ferons une étude détaillée d'une surface du troisième ordre; dans le chapitre II nous ferons une étude succincte de deux surfaces du quatrième ordre.

Dans ces deux premiers chapitres, nous aurons eu l'occasion de rencontrer plusieurs principes généraux que nous résumerons et que nous généraliserons dans le chapitre III.

L'application de ces principes nous permettra d'aborder quelques courbes et surfaces plus compliquées. Ce sera l'objet du chapitre IV.

Enfin, dans un cinquième et dernier chapitre, nous esquisserons une classification des surfaces au point de vue de la symétrie.

CHAPITRE PREMIER.

Etude détaillée d'une surface tétraédrique.

§ 1. — Etude sommaire de quelques cubiques planes.

1. — Nous ferons précéder l'étude de chaque surface de celle des principales courbes que l'on peut obtenir en la coupant par des plans.

Dans la description des courbes algébriques planes du troisième ordre, nous adopterons la classification de ces courbes en cinq grandes familles :

Cubiques	non singulières	(VI)	bipartites	1 ^o
			unipartites	2 ^o
	unicursales . .	(IV)	nodales { acnodales	3 ^o
			{ crunodales	4 ^o
			cuspidales (III)	5 ^o

Les cubiques non singulières sont de la VI^e classe; les cubiques nodales de la IV^e; et les cubiques cuspidales de la III^e.

Les cubiques non singulières sont du premier genre, et les cubiques unicursales du genre zéro.

Nous subdiviserons chaque famille en quatre groupes. Une cubique peut rencontrer la droite de l'infini en :

- trois points réels et distincts;
- un point réel et deux points imaginaires;
- un point simple et deux points coïncidents;
- trois points coïncidents.

Les courbes algébriques planes du troisième ordre se trouvent ainsi distribuées en vingt grandes espèces. Par exemple, le folium de Descartes $[x^3 - 3axy + y^3 = 0]$ est une cubique $[4^o, b]$; la cissoïde de Dioclès $[x(x^2 + y^2) = ay^2]$, une cubique $[5^o, b]$; la courbe $xy(x + y) = a^2(x - y)$, une cubique $[1^o, a]$; enfin la parabole semi-cubique $(my^2 = x^3)$ est une courbe $[5^o, d]$.

Chaque espèce se divise encore en plusieurs variétés ou sous-variétés. Mais les vingt espèces nous suffiront pour ce qui va suivre.

2. — Commençons par étudier le lieu géométrique des points dont les distances aux trois côtés d'un triangle équilatéral ont un produit constant.

Nous prendrons ce triangle comme triangle fondamental, et nous emploierons les coordonnées trilinéaires absolues.

L'équation du lieu pourra s'écrire :

$$\alpha \beta \gamma = m^3 .$$

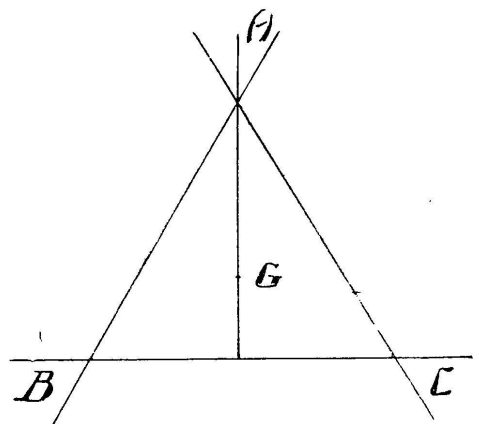


Fig. 1.

La courbe est une cubique ne rencontrant aucun côté du triangle à distance finie.

Si la cubique passe par le point: $\alpha = a, \beta = b, \gamma = c$, elle passe également par le point: $\alpha = b, \beta = c, \gamma = a$, et par le point: $\alpha = c, \beta = a, \gamma = b$. On ne doit pas perdre de vue que l'on a:

$$\alpha + \beta + \gamma = h = \text{hauteur}.$$

Si donc on fait tourner la cubique d'un angle de 120° autour d'une droite passant par le centre de gravité du triangle fondamental, et perpendiculaire à son plan, la courbe viendra prendre une position d'apparence identique à sa position première. Nous dirons que la cubique possède un axe ternaire normal à son plan.

En cristallographie, on appelle axe d'ordre n , et l'on représente par Λ^n une droite qui jouit de la propriété suivante: quand on fait tourner une certaine figure autour de cette droite, de la n^{e} partie d'un tour, elle vient occuper une position nouvelle, complètement indiscernable de la position primitive. La figure est alors dite restituée.

Les trois hauteurs du triangle de référence sont des Λ^2 , c'est-à-dire des axes de symétrie ordinaire. Si la courbe passe par le point (a, b, c) , elle passe par le point (a, c, b) . Une rotation de 180° autour d'une hauteur amène donc la restitution.

La courbe que nous étudions, admet alors quatre axes de symétrie: $\Lambda^3, 3\Lambda^2$.

3. — Cette cubique ne peut avoir aucun point d'inflexion.

D'abord un pareil point ne peut se trouver en G, car l'axe ternaire exigerait la présence d'au moins trois tangentes inflexionnelles (trois ou bien un multiple de trois), ce qui ne peut pas être.

La courbe ne peut pas avoir d'inflexion, en dehors du point G, car les quatre axes entraîneraient deux ou cinq autres inflexions, suivant que la première appartiendrait ou non à l'une des hauteurs du triangle ABC. Toutes ces inflexions se trouveraient sur une même circonférence de centre G.

Mais une courbe algébrique plane du troisième ordre n'admet jamais plus de trois inflexions réelles, et, quand elle en admet trois, elles sont collinéaires. Or l'existence d'une droite d'inflexions n'est pas compatible avec la symétrie autour du Λ^3 .

4. — La courbe n'a certainement pas de centre, car le centre d'une courbe d'ordre impair est toujours une inflexion.

Des raisonnements analogues prouvent que la cubique ne peut avoir de nœud ni de rebroussement. On se rappellera qu'une courbe non dégénérée du troisième ordre ne peut avoir qu'un seul point double.

5. — Des deux numéros qui précèdent, on peut conclure à la proposition suivante:

THÉORÈME: *Quand une courbe algébrique plane du troisième ordre, non dégénérée, possède un axe de symétrie ternaire, normal à son plan, elle n'admet ni inflexion, ni centre, ni nœud, ni rebroussement.*

6. — D'après ce que nous avons rappelé plus haut (1), toute cubique rencontre la droite de l'infini en trois points dont, au moins, un réel. Ce point réel, à l'infini, est le sommet d'un faisceau de cordes parallèles, asymptotiques à la courbe. Il détermine donc une direction asymptotique.

La symétrie ternaire associe, à cette direction, deux autres directions asymptotiques. Toute cubique à Λ^3 appartient donc au groupe a (1).

La courbe ne rencontre aucune de ses trois asymptotes. Car, si elle en rencontrait une, elle devrait les rencontrer toutes les trois, en vertu de la symétrie ternaire. Mais on sait que les trois intersections d'une cubique avec ses asymptotes, sont collinéaires. La droite, qu'elles déterminent, s'appelle la *satellite* de la droite de l'infini. La symétrie exigerait que cette dernière eût trois satellites, ce qui est absurde. Donc:

7. — THÉORÈME: *Quand une courbe algébrique plane du troisième ordre, non dégénérée, possède un axe de symétrie ternaire, normal à son plan, elle admet toujours trois asymptotes, et n'en rencontre aucune.*

8. — La cubique $\alpha\beta\gamma = m^3$, que nous avons définie plus haut (2), ne rencontre aucun côté du triangle fondamental, à distance finie. Par conséquent, elle les rencontre tous trois à distance infinie. Elle admet donc ces trois côtés comme asymptotes.

9. — Le triangle fondamental ABC (2) partage le plan en sept régions. L'une de ces régions est intérieure au triangle; trois autres sont adjacentes à des côtés; et trois autres opposées à des angles.

Si la constante m est négative, la courbe ne pénètre pas à l'intérieur du triangle; elle se compose de trois branches, situées dans les régions adjacentes aux côtés. Elle est donc unipartite [2°, a].

Si la constante m est positive, la courbe comprend toujours trois branches, situées dans les régions opposées aux angles. Mais il peut y avoir un ovale intérieur au triangle. Suivant les valeurs positives de m , la courbe sera donc unipartite ou bipartite.

Comme transition, nous aurons une courbe unicursale, nécessairement acnodale (4).

Nous nous proposons d'étudier séparément chacun de ces cas.

10. — Voyons d'abord comment la cubique rencontre les médianes du triangle de référence. Entre les trois coordonnées trilineaires absolues d'un point quelconque, on a la relation fondamentale.:

$$\alpha + \beta + \gamma = h ;$$

h désigne une hauteur-médiane (2).

Nous devons résoudre les trois équations suivantes, considérées comme simultanées:

$$\alpha\beta\gamma = m^3, \quad \alpha + \beta + \gamma = h, \quad \beta = \gamma.$$

En vertu de la troisième, les deux autres peuvent s'écrire:

$$\alpha\beta^2 = m^3, \quad \alpha + 2\beta = h.$$

L'avant-dernière montre que α et m ont toujours le même signe. Eliminons α ; il vient:

$$m^3 = \beta^2(h - 2\beta) = h\beta^2 - 2\beta^3;$$

si nous divisons par $m^3\beta^3$, nous obtiendrons:

$$\frac{1}{\beta^3} - \frac{h}{m^3} \frac{1}{\beta} + \frac{2}{m^3} = 0.$$

Le discriminant de cette équation cubique est:

$$\delta = \frac{1}{m^6} - \frac{1}{27} \frac{h^3}{m^9} = \frac{1}{27m^9} (27m^3 - h^3).$$

Il en résulte immédiatement le tableau suivant:

$m < 0$ cubique unipartite non singulière [2°, a];

- $m = 0$ cubique dégénérée en trois droites ;
 $0 < m < \frac{h}{3}$ cubique bipartite [1° , a] ;
 $m = \frac{h}{3}$ cubique acnodale [3° , a] ;
 $m > \frac{h}{3}$ cubique unipartite non singulière [2° , a].

11. — *Cubique acnodale.* Le point double isolé ne peut être que G, en vertu de la symétrie. La courbe est unicursale. Nous allons chercher son intersection mobile avec une droite variable passant par G. Nous devons résoudre les équations :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = \frac{h}{3}(u + v + w), \quad \alpha + \beta + \gamma = h, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{h^3}{27}.$$

Nous avons proposé ce système, sous le n° 9214, dans le *Journal de mathématiques élémentaires* (Paris, Vuibert, 15 juillet 1920). La nature géométrique du problème suggère la solution : des deux premières équations, on tire la valeur de β et de γ en fonction de α ; on substitue dans la troisième ; on obtient une équation qui doit admettre la racine double : $\alpha = \frac{h}{3}$. On divise par :

$$(3\alpha - h)^2 = 9\alpha^2 - 6h\alpha + h^2,$$

et l'on conserve une équation linéaire, de résolution facile. On trouve ainsi :

$$\alpha = -\frac{h(v - w)^2}{3(u - v)(u - w)};$$

β et γ s'obtiennent par permutation tournante.

12. — *Cubique bipartite.* $0 < m < \frac{h}{3}$. Plus haut (10), nous avons cherché les points communs à la bissectrice $\beta = \gamma$ et à la courbe. Nous avons obtenu l'équation :

$$2\beta^3 - h\beta^2 + m^3 = 0.$$

Puisque la cubique est bipartite, cette équation a ses trois racines réelles. On applique le théorème de Descartes, et l'on trouve une racine négative, et deux positives. La bissectrice envisagée rencontre donc la courbe en trois points réels et différents, deux à l'intérieur du triangle, le troisième dans la ré-

gion A (2). On a vu (10) que les trois valeurs de α ont le signe de m .

On fera le même raisonnement pour les deux autres bissectrices. Ainsi la cubique possède un ovale, intérieur au triangle asymptotique (8). Cet ovale est très différent d'une ellipse: il admet la symétrie du triangle équilatéral, $\Lambda^3, 3\Lambda^2$.

La cubique bipartite a neuf sommets. Nous appellerons sommet tout point où la courbe est rencontrée par l'un de ses axes de symétrie.

13. — Nous proposons d'appeler *tricentre* le point où le plan d'une courbe est rencontré par un axe de symétrie ternaire.

Quand une courbe plane possède un tricentre, elle est représentable, en coordonnées trilinéaires absolues, par une équation symétrique. On doit prendre, comme figure de référence, un triangle équilatéral dont les médianes concourent au tricentre.

Nous croyons pouvoir affirmer que l'étude de la courbe sera beaucoup plus simple en coordonnées trilinéaires qu'en coordonnées cartésiennes. A propos de chaque problème particulier, la symétrie cristallographique d'une figure suggérera les coordonnées dont on doit se servir.

§ 2. — Symétrie du tétraèdre régulier.

14. — Soit ABCD un tétraèdre régulier. Ce polyèdre n'admet aucun centre. La perpendiculaire AH, abaissée d'un sommet sur la face opposée, est un axe ternaire, car, si l'on fait tourner le solide, autour de cette droite, d'un tiers de tour, il y a restitution (2). Par chaque sommet, passe un Λ^3 ; il y a donc $4\Lambda^3$.

La droite MN, qui joint les milieux de deux arêtes opposées, est un axe de symétrie binaire. Donc $3\Lambda^2$.

Les sept axes de symétrie se coupent au centre de gravité du tétraèdre.

Le plan ABM, qui contient une arête et le milieu de l'arête opposée, est un plan de symétrie. Chaque arête détermine un pareil plan P. Donc 6 P.

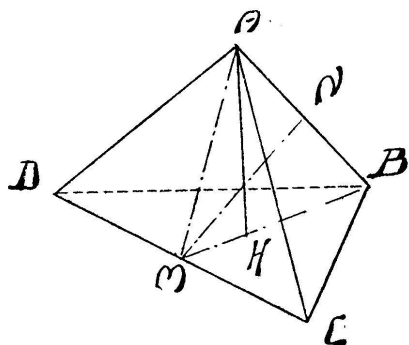


Fig. 2.