DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DE L'EXPRESSION POUR LE RAYON DE COURBURE

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DE L'EXPRESSION POUR LE RAYON DE COURBURE

PAR

J. M. Child (Manchester) et B. Petronievics (Belgrade).

Ayant envoyé l'article qui précède, en langue serbe, à Monsieur J. M. Child, professeur à l'Université de Manchester, j'ai reçu de lui la lettre suivante:

« ..... I was very interested in the pamphlet you sent me. Of course, I could not follow all the argument, printed as it was in Serbian; and I consider it a very good idea to republish it, with further developments, in French. Here is a little theorem in infinitesimal geometry of the same kind, which, as far as I am aware, is new. It leads directly to the value of the radius of curvature in Cartesian Coordinates. Perhaps you would care to treat it more rigorously according to the method of the pamphlet; if so I should be honoured if you would include it in your French publication as one of the further developments.

Yours very sincerely,

J. M. Child. »

La première partie de cet article contient la traduction de la part de collaboration importante de M. Child, mentionnée dans sa lettre; dans la deuxième, j'ai appliqué à sa fig. 1 ma méthode géométrique.

I

Théorème. — Dans la fig. 1 ABC représente la tangente au point A d'un cercle de centre O; OB et OC coupent ce cercle en des points P et Q.

Soit QT une tangente au point Q, coupant ABC en T. Tirez BD $\perp$ OC. De P tirez PR $\|$ AC coupant QT en S; de même tirez PW $\perp$ OC et, par Q, QR $\perp$ PR. On aura alors:

$$\frac{BC}{PW} = \frac{OB}{OC} \cdot \frac{SQ^2}{SR^2} .$$

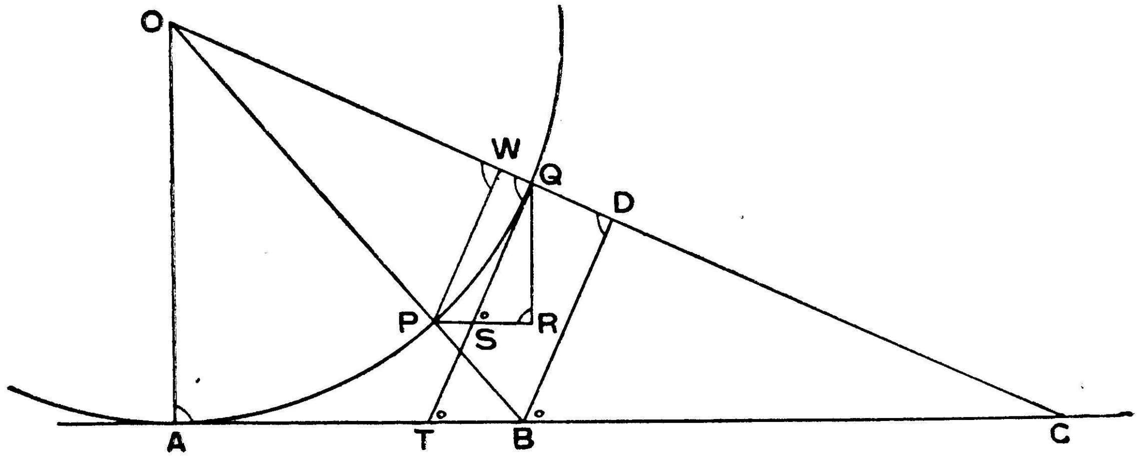

Fig. 1.

Preuve: Les angles marqués dans la fig. 1 sont évidemment égaux. Donc, par la similitude des triangles, nous avons:

$$\left.\begin{aligned} \frac{BC}{BD} &= \frac{OC}{OA} = \frac{SQ}{SR} \\ \frac{BD}{PW} &= \frac{OB}{OP} = \frac{OB}{OA} \end{aligned}\right\} \therefore \frac{BC}{PW} = \frac{OB \cdot OC}{OA^2} = \frac{OB}{OC} \cdot \frac{SQ^2}{SR^2} .$$

Corollaire. A la limite, l'angle BOC dans la fig. 2 devenant infiniment petit, on a (dans la fig. 1):

$$\frac{PR}{SR} \to 1 , \quad \frac{PW}{PQ} \to 1 , \quad \frac{OB}{OC} \to 1 \quad \text{et} \quad \frac{SQ}{SR} \to \frac{PQ}{PR} ;$$

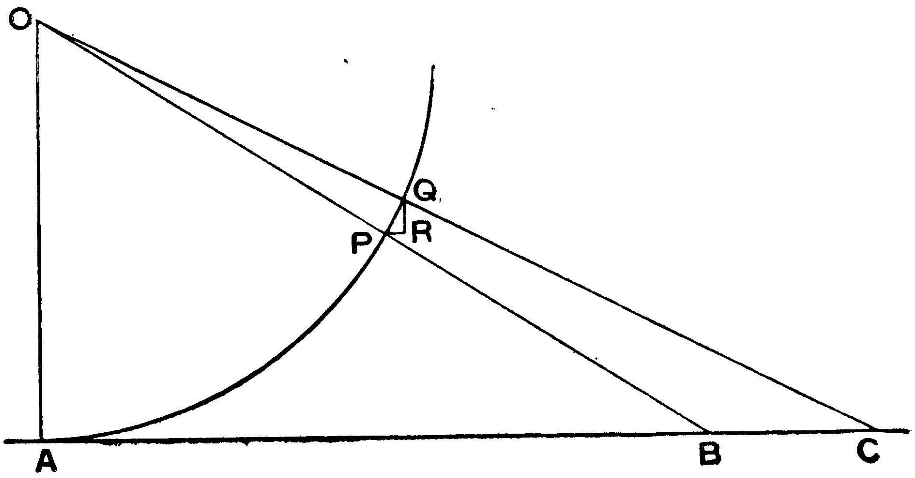

Fig. 2.

ce qui donne finalement:

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{PQ^2}{PR^2}$$

ou

$$\frac{BC}{PR} = \left(\frac{PQ}{PR}\right)^3 .$$

Application au rayon de courbure. — Si ρ (dans la fig. 3) représente le rayon de courbure de la courbe LM au point P, et Q un point voisin, on aura alors:

$$PR = \delta x \ , \qquad RQ = \delta y \ ,$$

$$PQ = \left\{ 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \delta x \ ,$$

d'où

$$\left(\frac{PQ}{PR}\right)^3 = \left\{ 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

Dans la fig. 3 nous avons:

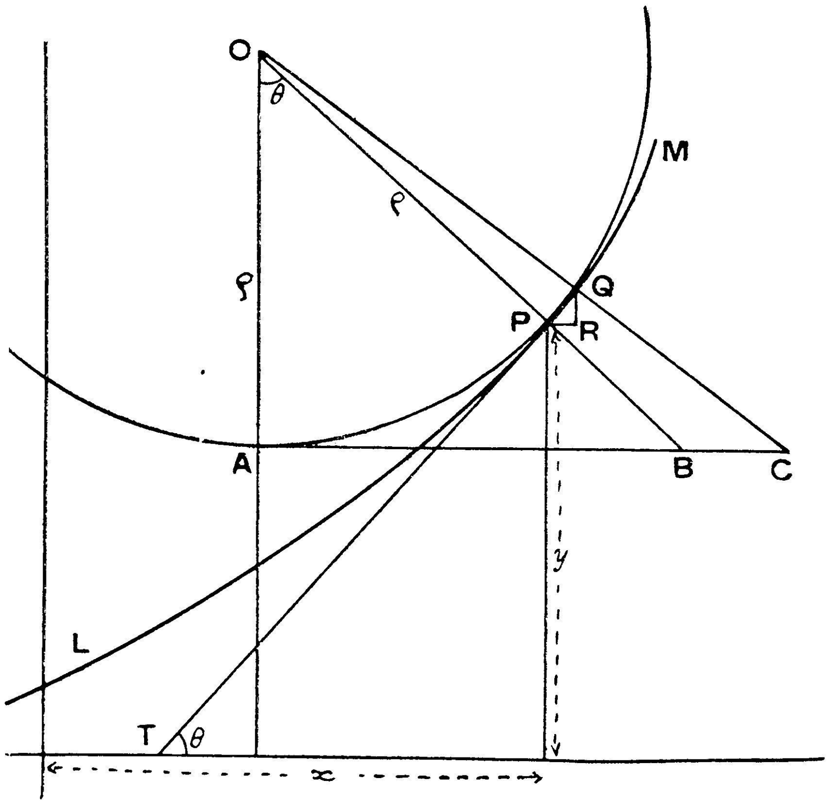

Fig. 3.

$$AB = \rho \ \mathrm{tg}\ \theta$$

$$AC = \rho \ \mathrm{tg}\ (\theta + \delta\theta)$$

d'où

$$BC = \delta(\rho \operatorname{tg} \theta)$$
$$= \rho \cdot \delta\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$$

d'où

$$\frac{BC}{PR} = \rho \cdot \frac{\delta\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{\delta x}$$

Donc, d'après le corollaire ci-dessus $\frac{BC}{PR}$ étant $= \left(\frac{PQ}{PR}\right)^3$, nous aurons, en passant à la limite,

$$\rho \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

II

Dans la fig. 4, PT est la tangente au point P du cercle de centre O′, QS la secante qui coupe ce cercle en des points P et Q, QT′ la tangente du même cercle au point Q, O′F et O′F′ les deux droites passant par les points P et Q du cercle et coupant la tangente AC (|| OX) en B et C, QN et PM $\perp$ OX et || OY, PR $\perp$ QN et || OX, DE || QS et D′E′ || PT, $\angle$ AO′P $= \theta$ et $\angle$ PO′Q $= \Delta\theta$.

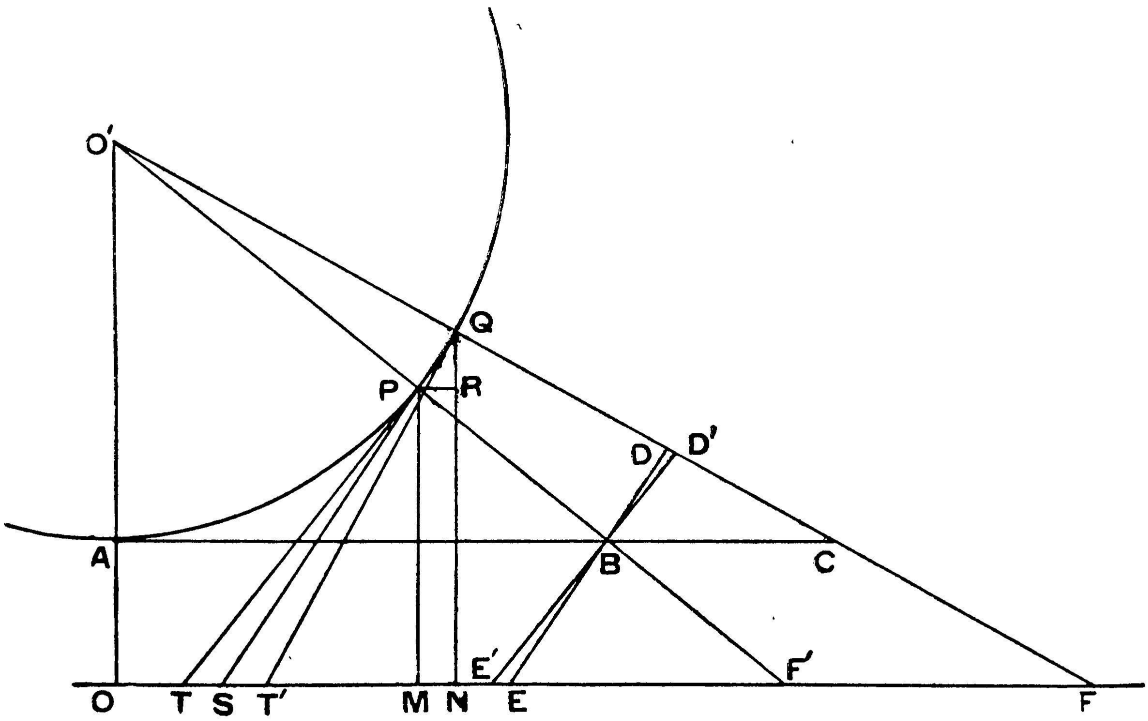

Fig. 4.

De la fig. 4 résulte immédiatement:

$$BC = O'A \,.\, \Delta \operatorname{tg} \theta = \rho \Delta \operatorname{tg} \theta \,.$$

De $\Delta BCD \sim EFD$ on a:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{EF}{ED} \,.$$

Mais comme, en passant à la limite, ΔEFD coïncide avec $E'F'B$, on aura:

$$\lim \frac{BC}{BD} = \frac{E'F'}{E'B} \,,$$

et, $\Delta E'F'B$ étant $\sim TPM$,

$$\lim \frac{BC}{BD} = \frac{TP}{TM} \,. \tag{1}$$

D'autre part, BD étant $\parallel PQ$, on a:

$$\frac{BD}{PQ} = \frac{BO'}{PO'} = \frac{BO'}{AO}$$

et, $\Delta BO'A$ étant $\sim PTM$,

$$\frac{BD}{PQ} = \frac{PT}{MT} \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{BC}{BD} \cdot \frac{BD}{PQ} = \frac{PT^2}{MT^2} \,. \tag{3}$$

De $\Delta PQR \sim SPM$ on a:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{SP}{SM} \,.$$

Mais comme, en passant à la limite, ΔSPM coïncide avec TPM, on aura:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{TP}{TM} \,. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) donnent:

$$\lim \frac{BC}{PQ} \cdot \frac{PQ}{PR} = \frac{TP^3}{TM^3} \,. \tag{5}$$

Comme nous avons d'une part:

$$\lim \frac{BC}{PR} = \frac{\lim \rho\Delta \operatorname{tg} \theta}{\lim \Delta x} = \rho \cdot \frac{d \operatorname{tg} \theta}{dx} = \rho \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

et d'autre part (équation (4)):

$$\frac{TP^3}{TM^3} = \frac{PQ^3}{PR^3} = \frac{PQ^2}{PR^2} \cdot \frac{PQ}{PR} = \frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} \cdot \sqrt{\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2}}$$

$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

on aura enfin (équation (5)):

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (6)$$

CAMILLE JORDAN

(1838-1922)

Ce n'est pas entreprendre une tâche sans péril que d'essayer de rendre un juste hommage à un si grand nom. Nous nous appuierons surtout sur ce qui a déjà été dit par des voix particulièrement autorisées, notamment par celles de MM. Emile Bertin[1], Emile Picard[1], Robert d'Adhémar[2], Henri Lebesgue[3], Henri Villat[4].

Marie-Ennemond-Camille Jordan naquit à la Croix-Rousse, près Lyon, le 5 janvier 1838. Il était fils de l'ingénieur Alexandre Jordan et de Joséphine Puvis de Chavannes, sœur du célèbre peintre. Après de premières études au Collège d'Oullins et au Lycée de Lyon, il entra à l'Ecole Polytechnique comme élève en 1855, comme examinateur en 1873, comme professeur en 1876; il conserva ce dernier titre pendant 36 ans ! Il fut aussi

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1922.
[2] *Revue générale des Sciences*, 15 février 1922.
[3] *Revue scientifique*, 22 avril 1922.
[4] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1922, fascicule 1.