SUR LES FORMULES DE LORENTZ

et, à cause de (43):

$$D = \prod_{i=1}^{i=n-1} \cdot \left(\frac{1}{q_{i-1,i}^{n-i}} \right) ; \qquad (44)$$

or, toutes les quantités $\left(\frac{1}{q_{k,k+1}}\right)$ sont positives, jusqu'à la valeur $k = n-2$; seul, le signe de la dernière de ces quantités, $\left(\frac{1}{q_{n-1,n}}\right)$, est encore inconnu; la formule (44) le détermine, puisque le signe de D est déterminé. On définit ainsi complètement la *direction* positive sur le dernier axe g_n du n-èdre rectangle qui accompagne (1_{p_1}).

Remarque. — Il est évident qu'on pourrait étudier la courbe $\mathcal{C}$ au moyen des représentations sphériques des n arêtes du n-èdre attaché au point P_1, soit pour le cas général de (1_{p_1}), soit pour le cas fondamental de (1_{g_1}). Cela reviendra encore à porter, sur chaque axe du n-èdre rectangle mobile autour de l'origine, un vecteur-unité (1_i). (N^os 5, 7, 8.)

SUR LES FORMULES DE LORENTZ

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Je me propose d'établir les hypothèses nécessaires et suffisantes pour conduire aux formules de la relativité restreinte.

Je conserve les notations de M. E. Picard dans sa très intéressante Notice de l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1922. La droite $X'\Omega X$ glisse sur la droite $x'Ox$ avec une vitesse constante v; ces deux droites sont de même sens. Un observateur est lié à chacune de ces droites; il y a pour chacun d'eux un temps local: t pour l'observateur fixe, T pour le second. On suppose $t = T = 0$ quand Ω coïncide avec O. Un même point

M pris sur l'axe des x a une abscisse que le premier observateur évalue en nombre x; le même point considéré comme appartenant à l'axe $X'\Omega X$ a pour abscisse X, d'après le second observateur, et cela à l'époque t pour le premier T pour le second. Nous admettrons qu'une même longueur étant mesurée par un observateur mobile verra sa mesure multipliée par un cœfficient α par l'observateur fixe. Cela posé, on a

$$\overline{O\Omega} + \overline{\Omega M} = \overline{OM} .$$

Pour le premier observateur : $\overline{O\Omega} = vt$, $\overline{\Omega M} = \alpha X$, $\overline{OM} = x$ donc

$$vt + \alpha X = x . \tag{1}$$

Remarquons maintenant qu'on peut laisser le second observateur fixe, à condition que la droite $x'Ox$ glisse sur $X'\Omega X$ avec la vitesse $-v$; dans ces conditions le second observateur écrira:

$$vT + X = \alpha x . \tag{2}$$

Acceptant la collaboration des deux observateurs, nous regarderons les équations (1) et (2) comme simultanées; en résolvant le système de ces équations on trouve

$$X = \frac{x - vt}{\alpha} \qquad T = \frac{vt + (\alpha^2 - 1)x}{v\alpha} \tag{3}$$

ou, si l'on préfère:

$$x = \frac{X + vT}{\alpha} \qquad t = \frac{T + (1 - \alpha^2)X}{v\alpha} \tag{3'}$$

Pour déterminer le coefficient α, nous admettrons qu'il existe un phénomène physique se traduisant par l'égalité des vitesses du point M mesurées par les deux observateurs, ce qui revient à supposer qu'il existe un nombre c tel que l'on ait:

$$c\,dt = dx , \qquad c\,dT = dX . \tag{4}$$

En différentiant les équations (1) et (2) et tenant compte des relations (4) on obtient

$$(c - v)\,dt = c\alpha\, dT$$

$$(c + v)\,dT = c\alpha\, dt$$

d'où

$$c^2 - v^2 = c^2 \alpha^2$$

et par suite

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \,.$$

Nous aurons donc, enfin:

$$X = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad T = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \,, \tag{5}$$

ou

$$x = \frac{X + vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{T + \frac{vX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \,. \tag{5'}$$

Si l'on suppose que c soit la vitesse de la lumière on aura les formules de Lorentz.

Remarques. — 1° Si l'on adopte les formules (5) ou (5′) on doit accepter les équations (1) et (2) qui leur sont équivalentes pour $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

2° Pour que les formules (5) ou (5′) soient *acceptables* il faut supposer $v < c$. On ne peut rien conclure de plus, de ce qui précède. Pour établir qu'aucune vitesse ne peut surpasser celle de la lumière, il faut invoquer d'autres raisons.

3° Des équations (5) ou (5′) on tire:

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 T^2 - X^2$$

et aussi,

$$dX = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad dT = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v'}{c^2}}} \,,$$

d'où

$$c^2\, dT^2 - dX^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 \,.$$

On en conclut que pour une translation constante de direction quelconque on aura l'invariance définie par

$$c^2\, dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \,.$$