

# Fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante

Autor(en): **Winants, par Marcel**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

### Fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante

par Marcel WINANTS (Liège).

I. — En analyse élémentaire, on étudie les fonctions d'une *variable réelle*. On fait correspondre aux diverses valeurs de celle-ci les différents points d'une droite ou d'un segment de droite. On connaît des fonctions périodiques de cette variable, c'est-à-dire des fonctions telles que l'on ait :

$$f(x + mT) = f(x) ,$$

quelle que soit la valeur de  $x$  ;  $T$  représente une constante bien déterminée — c'est la période — tandis que  $m$  est un entier complètement arbitraire : négatif, nul ou positif. Les fonctions périodiques les plus simples sont les fonctions circulaires.

Et l'on a démontré l'impossibilité d'une fonction doublement périodique.

II. — Aux différents points d'une surface plane on peut faire correspondre les diverses valeurs d'une *variable complexe*. L'expression  $z = x + iy$  est appelée *une* variable (une, au singulier). L'analyse des variables complexes a pris un développement tel que l'on en peut considérer l'analyse réelle comme un cas très particulier.

On connaît des fonctions doublement périodiques d'une seule variable complexe ; ce sont des fonctions satisfaisant l'égalité

$$f(z + mT + m'T') = f(z) ,$$

quelle que soit la valeur de  $z$  ;  $T$  et  $T'$  sont les deux périodes, et l'on a démontré que leur rapport était nécessairement complexe ;  $m$  et  $m'$  sont des entiers arbitraires.

Les fonctions elliptiques sont les plus simples parmi les fonctions doublement périodiques d'une seule variable indépendante.

Un très original théorème de Jacobi démontre l'impossibilité d'une fonction uniforme triplement périodique d'une seule variable complexe.

III. — Nous allons développer des considérations analogues pour l'espace à trois dimensions, et nous montrerons enfin comment la science cristallographique semble justifier tous ces développements.

Soient trois axes coordonnés rectangulaires. Envisageons trois vecteurs non coplanaires  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , issus de l'origine.

Considérons le parallélépipède dont les huit sommets correspondent aux vecteurs :

$$\left. \begin{array}{l} 0, a + b + c, \\ a, b, c, \\ b + c, c + a, a + b. \end{array} \right\} (P).$$

A l'intérieur de son volume, prenons un point quelconque, et soit  $u$  le vecteur joignant ce point à l'origine. Choisissons  $u$  comme variable indépendante.

Par un procédé quelconque, à toute valeur de  $u$  faisons correspondre un vecteur  $v$  ; nous aurons :

$$v = f(u) ;$$

posons ensuite :

$$f(u + ma + m'b + m''c) = f(u) .$$

Et nous aurons ainsi défini une *fonction triplement périodique* d'une seule variable indépendante.

Des fonctions de cette nature ont peut-être déjà été envisagées, notamment en analyse vectorielle ? Nous nous bornerons pour le moment à soulever la question et nous serions heureux si quelque lecteur de *l'Ens. math.* pouvait nous renseigner sur ce point.

IV. — Les cristallographes donnent au volume P le nom de paralléloèdre. Ce paralléloèdre est empli de matière et d'éther. On conçoit un cristal comme formé d'un nombre prodigieusement grand de paralléloèdres identiques, juxtaposés.

Toute propriété, physique ou chimique, en un point d'un cristal, est donc une fonction triplement périodique de la position de ce point. Cette fonction est actuellement réelle, mais ce n'est là qu'un cas particulier.

La triple périodicité d'une structure cristalline est un fait qu'aucun cristallographe ne conteste plus. Elle pourrait, et même devrait suggérer au mathématicien l'étude systématique des fonctions à trois périodes. Cette étude nous paraît fort difficile, d'autant plus que nous ne connaissons encore aucune analyse à trois dimensions, pouvant être considérée comme une généralisation de l'analyse complexe. On ne soutiendra certainement pas que la théorie des quantités complexes rentre dans celle des quaternions comme un cas particulier dans un cas général.

Néanmoins, nous croyons qu'aujourd'hui l'on peut ne plus mettre en doute l'existence des fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante.

LIÈGE (Université), le 31 mars 1923.