

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE MORLEY

Autor(en): **Niewenglowski, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515746>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE MORLEY

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Je rappellerai, en premier lieu, les propositions suivantes:

1° Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

En appelant A, B, C les angles de ce triangle, on a

$$\widehat{BIC} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

2° Réciproquement, si le point I est, à l'intérieur du triangle ABC et sur la bissectrice de l'angle A et si, en outre,

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

le point I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Pareillement:

$$\widehat{AIC} = 90^\circ + \frac{B}{2},$$

$$\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{C}{2}$$

donc la perpendiculaire MN menée à AI par le centre I, fait avec IC et IB les angles

$$\widehat{CIN} = \frac{B}{2}, \quad \widehat{BIM} = \frac{C}{2}$$

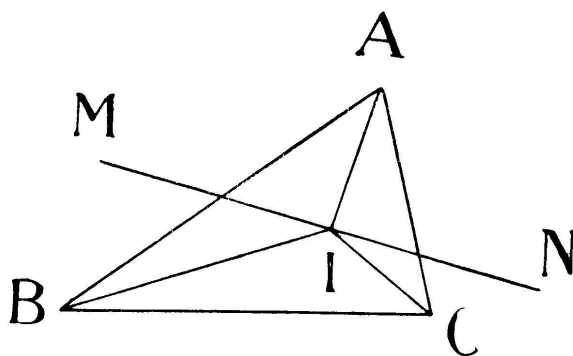


Fig. 1.

3° Supposons toujours que AI soit la bissectrice de l'angle A et posons $\widehat{ABI} = \beta$, $\widehat{IBC} = \beta'$; $\widehat{ACI} = \gamma$, $\widehat{ICB} = \gamma'$. Je dis

que si l'on a :

$$\widehat{\text{CIN}} = \beta \quad \text{et} \quad \widehat{\text{BIM}} = \gamma$$

I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

En effet, les sommes $\beta + \gamma$ et $\beta' + \gamma'$ ayant, l'une et l'autre $\widehat{\text{BIC}}$ pour supplément, sont égales. On peut donc écrire

$$\beta + \gamma = \beta' + \gamma' = \frac{B + C}{2}$$

d'où il résulte que

$$\widehat{\text{BIC}} = A + \beta + \gamma = A + \frac{B + C}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

ce qui démontre la proposition.

Cela posé, soient D, E, F les milieux des côtés d'un triangle équilatéral HKL. Soient α, β, γ trois angles dont la somme $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. A l'intérieur du triangle HEF, construisons le triangle isocèle EFD' de façon que les angles $\widehat{\text{HED}}' = \widehat{\text{HFD}}' = \alpha$; pareillement, traçons les triangles isocèles DFE' et DEF' tels que $\widehat{\text{KFE}}' = \widehat{\text{KDE}}' = \beta$; $\widehat{\text{LDF}}' = \widehat{\text{LEF}}' = \gamma$.

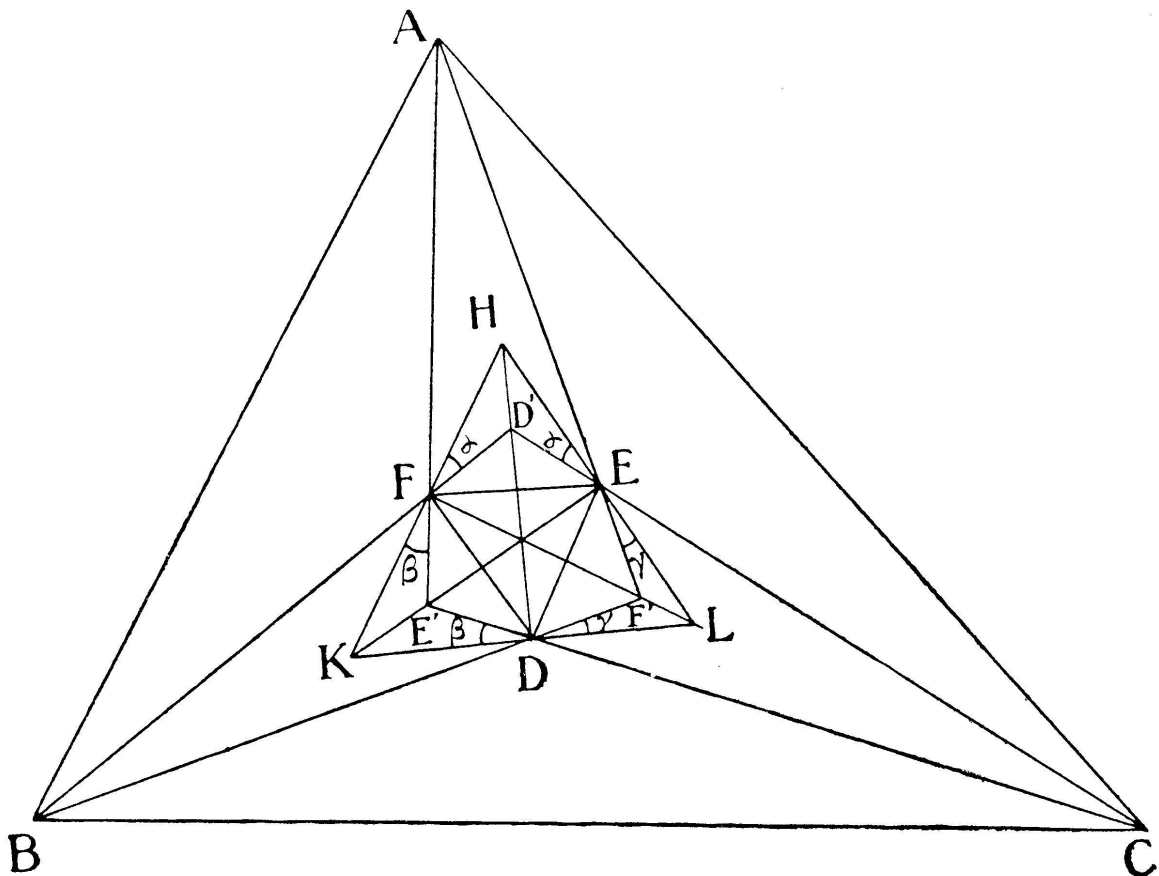


Fig. 2.

Appelons A le point de rencontre des droites $E'F$, $F'E$. Dans le triangle AEF, les angles adjacents au côté EF valant $60^\circ + \beta$ et $60^\circ + \gamma$, le troisième angle vaut α . Pareillement, si B est le point de rencontre des droites $D'F$, $F'D$ et C celui des droites $D'E$, $E'D$, on voit que $\widehat{DBF} = \beta$, $\widehat{DCF} = \gamma$.

Remarquons maintenant que la droite DH passe par D' et n'est autre que la bissectrice de l'angle $BD'C$, puisqu'elle est perpendiculaire au milieu de EF.

D'autre part $\widehat{LDC} = \beta$, $\widehat{KDB} = \gamma$; donc, d'après le lemme rapporté plus haut (3°), D est le centre du cercle inscrit au triangle BCD' . On verra de même que E est le centre du cercle inscrit au triangle ACE' et F le centre du cercle inscrit au triangle ABF' . On en conclut que les angles A, B, C du triangle ABC valent 3α , 3β , 3γ respectivement. Les droites AE, AF partagent l'angle A en trois parties égales, de même BD, BF pour l'angle B et CD, CE pour l'angle C. On a ainsi démontré le théorème de Morley:

On partage chaque angle d'un triangle ABC en trois parties égales par les droites AE, AF; BD, BF; CD, CE qu'on peut appeler trisectrices. Les trisectrices BD, CD voisines du côté BC se rencontrent en D; les trisectrices CE, AE voisines du côté CA se coupent en E et enfin les trisectrices voisines du côté AB se coupent en F.

Le triangle DEF est équilatéral.

