CONFÉRENCES GÉNÉRALES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Conférences générales

Les conférences générales, au nombre de cinq, ont été réparties comme suit :

1. — Jeudi 23 septembre, 14 h. 30. — Sir Joseph Larmor, professeur à l'Université de Cambridge (Angleterre) : *Questions in physical interdetermination.*

2. — Vendredi 24 septembre, 14 h. 30. — M. Dickson, professeur à l'Université de Chicago : *Relations between the Theory of Numbers and other branches of Mathematics.*

3. — Samedi 25 septembre, 10 h. 30. — M. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain : *Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent.*

4. — Lundi 27 septembre, 10 h. 30. — M. Volterra, professeur à l'Université de Rome : *Sur l'enseignement de la Physique mathématique et de quelques points d'analyse.*

5. — Mardi 28 septembre, 14 h. 30. — M. Nörlund, professeur à l'Université de Lund (Suède) : *Sur les équations aux différences finies.*

Nous sommes en mesure de pouvoir donner un aperçu très fidèle de ces conférences, grâce aux résumés qu'ont bien voulu nous remettre MM. les auteurs.

1. — Conférence de Sir Joseph Larmor : *Questions in physical interdetermination.* — La relativité est essentiellement une détermination locale. Ceci implique pourtant des relations entre ces déterminations locales dont l'ensemble n'est alors pas distinct du prolongement de l'une d'elles au-delà de son propre domaine. Il y a donc interdétermination.

Dans la relativité de la gravitation, il y a quatre degrés d'indétermination, une région de l'espace-temps étant déterminée localement par six variables au moyen d'équations différentielles. Les quatre autres variables dont la présence dans la théorie s'impose, deviennent superflues, grâce à certaines identités, pour une région déterminée seulement par des relations entre distances ; elles sont au contraire indispensables, si cette région a des caractéristiques électriques aussi bien que métriques. Un champ électrique détermine toute chose : on peut dire qu'il détermine un éther de référence qui, autrement, resterait latent.

La méthode analytique symbolique en physique a été développée systématiquement par Lagrange. Elle est moins expressive, mais elle est moins limitée par sa dépendance de l'intuition que la méthode directe de géométrie vectorielle infinitésimale. Ces deux méthodes se complètent l'une l'autre.

Le principe de prolongement complet a été énoncé par Gauss pour le potentiel Newtonien. Il peut être étendu à tout problème statique où la stabilité est présupposée : (exemple : un milieu élastique). Il n'y a pas là relation de cause à effet, mais uniquement concomitance.

Le principe se perd dans un quasi-espace comme celui de Minkowski. Une telle extension à quatre paramètres est l'analogue, non pas de l'espace, mais de la radiation dans l'univers actuel.

Toute communication entre les objets permanents (atomes de matière), est établie par radiation — exceptées les influences de gravitation.

C'est une interdétermination limitée. Un champ de radiation ne peut être étendu par prolongement à moins que nous ne connaissions la distribution des « sources » (atomes radiant) au-delà de ce champ.

La radiation pure exige que l'espace ait précisément trois dimensions.

Un champ de radiation a des propriétés intrinsèques par rapport au groupe de transformations à quatre paramètres de Minkowski, tout comme un corps solide n'a de sens que dans le groupe cartésien à trois paramètres de l'espace ordinaire.

Le principe de moindre action est fondamental en physique parce que, d'après Hamilton, il établit un système de relations « extrêmales », c'est-à-dire de relations aux extrémités, aux limites de l'intégrale. L'action à distance est remplacée par des relations à distance, dues cependant à l'intermédiaire de radiations dans l'espace-temps.

Si un système matériel composé d'un ensemble fini d'atomes et d'ions est donné, son champ d'activité devrait être défini et déterminé sans pour cela pouvoir être exprimé au moyen des longueurs et des temps par lesquels nous exprimons habituellement l'ensemble donné espace-temps. Nous pouvons appeler *éther* le complexe de relations qui déterminent ce champ d'activité. Dans un tel éther (aussi bien que dans la théorie d'Einstein), la gravitation peut être absorbée et les rayons déviés près du soleil. Mais on n'y peut admettre le déplacement des raies du spectre solaire.

2. — CONFÉRENCE de M. Léonard DICKSON : *Relations between the Theory of Numbers and other Branches of Mathematics.* — Dans cette conférence, nous envisageons quelques problèmes typiques de la théorie des nombres abordés par le moyen d'autres parties des mathématiques, plutôt que de faire une discussion technique de cette théorie.

Ainsi, je donne d'abord une application de la géométrie pour trouver toutes les solutions rationnelles de quelques équations homogènes. Je ne parle pas ici des équations du second degré dont toutes les solutions rationnelles peuvent se trouver tout de suite quand une solution est connue, parce que nous pouvons évidemment exprimer rationnellement les coordonnées de tous les points d'une surface quadrique par le moyen des droites passant par un point choisi sur la surface.

Pour fixer les idées je débute par la surface cubique de Hermite qui contient deux droites dont les équations ont leurs coefficients rationnels. Toute droite qui coupe celle-ci rencontrera la surface en un seul autre point dont les coordonnées sont par suite rationnelles. Une seconde méthode de solution est basée sur le fait que la surface cubique est le lieu des intersections des plans correspondants de trois faisceaux projectifs de plans (chaque faisceau étant la totalité des plans passant par un point). Nous pouvons passer de notre première solution qui est du 4^e degré par rapport à l'ensemble des paramètres à la seconde solution qui est du 3^e degré par rapport aux nouveaux paramètres, au moyen d'une transformation birationnelle des paramètres, transformation qui se trouve être ici sa propre inverse.

D'une façon générale, quand on a deux représentations paramétriques quelconques de tous les points d'une surface unicursale, les deux ensembles de paramètres sont liés par une transformation birationnelle.

Ensuite j'examine le problème plus difficile de trouver toutes les solutions en entiers, ou plus exactement de trouver des formules qui donnent toutes les solutions en entiers, quand les paramètres n'ont que des valeurs entières. En cherchant des matières intéressantes pouvant illustrer ce sujet, j'ai découvert une méthode bien simple et générale pour trouver les formules qui donnent toutes les solutions en entiers des équations homogènes et quadratiques à plusieurs variables. Dans le cas le plus simple, ces formules expriment le fait que la norme du produit de deux nombres complexes est égale au produit de ses normes.

Pour les équations à quatre variables, nous avons besoin de quelques propriétés simples des nombres algébriques, tandis que pour les équations à six variables nous faisons application des propriétés des quaternions entiers. En accord avec le but de cet exposé qui est de faire voir des applications de plusieurs parties des mathématiques à la théorie élémentaire des nombres, je saisis cette occasion de montrer que les théories des nombres algébriques et hypercomplexes nous donnent des moyens effectifs pour traiter la solution en entiers des équations.

Enfin, j'indique comment les invariants se présentent tout à fait naturellement dans la théorie des nombres.

3. — Conférence de M. C. de la Vallée Poussin : *Les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent.* — La défini-

tion des fonctions à variation bornée est due à M. C. Jordan (C-R, 1881). L'illustre mathématicien français y a été conduit dans l'étude de la convergence des *séries de Fourier* ; et, plus tard, il a trouvé une application toute naturelle de la même notion dans l'étude des *courbes rectifiables* (Cours, t. III, 1887).

Cette notion des fonctions à variation bornée s'est montrée extrêmement féconde. Parmi ceux qui ont poursuivi la voie ouverte par M. Jordan pour l'étude des séries de Fourier, il faut citer, en toute première ligne, M. W.-H. Young, qui a publié sur la question un grand nombre de mémoires et obtenu les résultats les plus généraux.

Mais le conférencier ne s'occupe point de ces travaux. Le développement de la théorie des fonctions à variation bornée s'est fait dans un sens inattendu et que l'inventeur ne pouvait prévoir, parce que ce développement n'est devenu possible qu'après les travaux de M. Lebesgue sur les intégrales définies.

L'instrument imaginé par M. Lebesgue a permis de pousser extrêmement loin l'*étude intrinsèque* des fonctions à variation bornée, de les disséquer en quelque sorte et de faire apparaître leurs parties constitutives distinctes. C'est de cette étude que le conférencier s'est proposé d'exposer les résultats les plus généraux et les conséquences les plus importantes.

Il s'occupe d'abord des diverses *définitions de l'intégrale de Lebesgue*. On peut les ramaner à trois types distincts : celle de M. Lebesgue, celle de M. Borel et celle de M. Young. La plus naturelle, parce que c'est celle qui altère le moins la conception antérieure de l'intégrale, est celle de M. Lebesgue, mais elle suppose les recherches de M. Borel sur la mesure des ensembles. Les deux autres ne sont venues à l'esprit qu'après le théorème de M. Lebesgue sur l'intégration terme à terme. La démonstration de M. Borel paraît être la plus élémentaire, parce qu'elle écarte la mesure des ensembles et ne conserve que le principe le plus simple qui sert à édifier cette théorie. La méthode de M. Young est parfaite en son espèce, elle écarte la notion même d'ensemble et ne fait intervenir que des conditions élémentaires de convergence. Mais, à notre point de vue actuel, la méthode de M. Lebesgue est la meilleure, parce que c'est celle qui prépare le mieux à l'étude de l'intégrale *comme fonction d'ensemble,* et que ce point de vue nous est indispensable.

Un des résultats essentiels obtenus dans les derniers temps est d'avoir montré l'identité des fonctions de point à variation bornée et des fonctions additives d'ensemble. L'étude intrinsèque des fonctions à variation bornée se confond donc avec celle des fonctions additives d'ensemble. Mais cette étude est bien plus simple et bien plus instructive quand elle se fait sur les fonctions d'ensemble plutôt que sur les fonctions de point. L'analyse fait apercevoir dans ces fonctions trois parties constitutives distinctes dont elles sont les sommes :

1° Une fonction absolument continue : c'est l'*intégrale indéfinie ;*

2° Une fonction continue sans l'être absolument : c'est la *fonction singulière ;*

3° Une fonction essentiellement discontinue : c'est la *fonction des sauts.*

La fonction des sauts est attachée à un ensemble dénombrable D facile à définir. La fonction singulière est attachée à un ensemble de mesure nulle S plus difficile à caractériser et le conférencier expose les résultats qu'il a obtenus et publiés sur la question.

La définition de l'intégrale d'une fonction continne rentre comme cas particulier dans une définition plus genérale, celle de l'*intégrale de Stieljes.* M. Lebesgue s'est posé la question de savoir si l'intégration au sens de Stieljes, ou *par rapport à une fonction à variation bornée,* peut s'étendre aux autres fonctions intégrables. M. Lebesgue a résolu la question en ramenant, par un changement de variable, l'intégrale de Stieljès à une intégrale ordinaire. Mais M. Young a reconnu le premier, en se servant de sa méthode de définition de l'intégrale de Lebesgue, que la définition de cette dernière intégrale est un cas particulier de celle de l'intégrale de Stieljes, mais un cas particulier qui ne présente par rapport au cas général *aucune simplification véritable.* Le conférencier montre que l'on arrive exactement au même résultat avec le procédé de définition de M. Lebesgue.

L'importance de l'intégrale de Stieljes est apparue tout récemment sous son vrai jour, grâce aux travaux de MM. Fr. Riesz, Hadamard et M. Fréchet. Les fonctions d'ensemble se rattachent aux *opérations fonctionnelles,* ou simplement aux *fonctionnelles,* dont M. Fréchet a ébauché la théorie générale. Les fonctions additives d'ensemble se confondent avec les fonctionnelles auxquelles M. Hadamard a donné le nom de *fonctionnelles linéaires.* Or M. Riesz a obtenu ce résultat essentiel : *Toute fonctionnelle linéaire s'exprime par une intégrale de Stieljes.*

Cette intégrale est ainsi rattachée à la plus importante des questions que l'on puisse se poser sur les fonctionnelles, à savoir celle de leur *différentiation.* En effet, la différentielle d'une fonctionnelle est, par définition, une fonctionnelle linéaire. Mais nous n'avons encore sur cette question toute neuve que les Mémoires de M. Fréchet et nous ne pouvons pas encore prévoir ce que l'avenir nous réserve d'intéressantes découvertes dans cette voie.

4. — Conférence de M. V. Volterra : *Sur l'enseignement de la Physique mathématique et de quelques points d'Analyse.* — M. Volterra se propose dans sa conférence d'esquisser le pro-

gramme d'un cours qu'il appelle de *physique analytique*, où les différentes théories seraient exposées d'une manière systématique et organique. Il donne d'abord un rapide aperçu sur l'histoire de la physique mathématique et examine la méthode suivant laquelle on enseigne ordinairement cette discipline.

Il se demande si, en prenant pour modèle la mécanique analytique, on ne pourrait pas constituer, pour la physique mathématique, quelque chose qui s'en approche. A son avis, il est actuellement possible de le faire: de même que les équations de la mécanique analytique relient entre eux des problèmes très différents de mécanique, celles de la physique mathématique unissent aussi des questions bien différentes au point de vue physique.

M. Volterra propose de trouver d'abord, d'une manière très rapide, les équations classiques de la propagation de la chaleur, de l'élasticité, de l'électromagnétisme, de l'hydrodynamique et de poser, sans perdre de vue le point de vue physique, les problèmes fondamentaux à résoudre. Les équations obtenues sont d'une nature très semblable.

Il faut maintenant les classer et donner les méthodes générales pour leur résolution. Ce serait l'objet de la seconde partie du cours. M. Volterra propose de faire cette classification au point de vue des caractéristiques. Il classe en même temps les types des différents problèmes. Quant aux méthodes à employer, il les distingue en trois types fondamentaux: celui de Green, celui des caractéristiques et celui des solutions simples.

Il examine ces divers procédés et il en prend occasion pour exposer quelques questions particulières d'un intérêt spécial. Il montre les relations qui conduisent ainsi, d'une manière assez simple et qui évite bien des difficultés, aux concepts de la relativité, aux transformations de Lorentz et à d'autres questions dont il donne un aperçu.

M. Volterra expose comment la méthode préconisée par lui permet de traiter simultanément plusieurs questions de physique mathématique se rapportant à des questions différentes de physique, en faisant ressortir le sens physique des résultats qu'on obtient. Il s'occupe d'une manière spéciale de certaines relations de réciprocité qui, tout en ayant un intérêt pour la solution analytique des problèmes, conduisent, dès qu'on les interprète, à d'importantes propriétés de physique: il cite en particulier, comme exemple, certaines propriétés qui se rattachent à l'étude du phénomène de Hall.

Il porte ensuite son attention sur l'intérêt d'une étude systématique des intégrales fondamentales, de leur signification physique, de leurs propriétés et plus spécialement de leurs singularités.

La troisième partie du programme est consacrée à l'application des méthodes qui se rattachent à la théorie des fonctions qui dépendent d'un nombre infini et continu de variables et qui permettent la résolution complète des problèmes posés. M. Volterra montre comment ces méthodes s'introduisent ici naturellement. Il indique la classification qu'on peut en faire et les principales questions qui s'y rattachent.

5. — Conférence de M. N.-E. Nörlund : *Sur les équations aux différences finies.* — Dans cette conférence on envisage le calcul aux différences finies du point de vue de la théorie des fonctions. Le premier problème important qui se pose dans cette branche de l'analyse, c'est l'étude des solutions de l'équation

$$\mathop{\Delta}_{\omega} F(x) = \varphi(x) , \qquad \text{où} \qquad \mathop{\Delta}_{\omega} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega} . \qquad (1)$$

La série

$$-\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega)$$

satisfait formellement à cette équation, mais elle diverge en général. En appliquant à cette série certains procédés de sommation on peut, dans des cas étendus, associer avec elle une fonction de x et de ω, soit $F(x \mid \omega)$, qu'on appelle la solution principale de l'équation (1). Cette solution est déterminée à une constante arbitraire près. Elle possède plusieurs propriétés remarquables qui la distinguent des autres solutions de l'équation (1).

Soit m un entier positif quelconque. On a

$$\sum_{s=0}^{m-1} F\left(x + \frac{s\omega}{m} \,\middle|\, \omega\right) = mF\left(x \,\middle|\, \frac{\omega}{m}\right) .$$

Quand ω tend vers zéro par des valeurs positives, la fonction $F(x \mid \omega)$ tend vers une limite et l'on trouve

$$\lim_{\omega \to 0} F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(z)\, dz .$$

Ces deux équations entraînent que

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z \mid \omega)\, dz = \int_a^x \varphi(z)\, dz .$$

Si la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^{1+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0 , \qquad \varepsilon > 0$$

on démontre que la fonction $F(x \mid \omega)$ admet, elle aussi, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers une limite quand x augmente indéfiniment. Cette propriété caractérise la solution principale. Je donne successivement plusieurs autres propriétés qui peuvent servir comme définition de la solution principale et je fais voir comment cette fonction se comporte au voisinage de ses points singuliers.

J'envisage ensuite les équations aux différences finies les plus générales de la forme

$$f_i(x + \omega) = R_i(f_1(x), \dots f_n(x), x), \qquad i = 1, 2 \dots n. \qquad (2)$$

Ces équations peuvent se résoudre à l'aide de la méthode des approximations successives de M. Picard. Dans chaque approximation il faut résoudre une équation de la forme (1). On démontre que les approximations successives convergent vers une limite qui est une solution des équations (2). Ces solutions forment une classe étendue de transcendantes nouvelles.

Séance des Sections.

Liste des communications présentées au Congrès.

Section I : Arithmétique, Algèbre, Analyse.

M. Young (Aberystwyth). Sur les définitions de l'aire et du volume et leur développement analytique.

M. Dickson (Chicago). Homogenous polynomials with a multiplication theorem.

M. Chatelet (Lille). La loi de réciprocité abélienne.

M. Daniell (Londres). On Stieltjes integrals and Volterra Compositions.

M. Amsler (Nancy). Sur le calcul symbolique sommatoire.

M. Fueter (Zurich). Einige Sätze aus der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Funktionen.

M. Denjoy (Strasbourg-Utrecht). Sur une classe d'ensembles parfaits en relation avec les fonctions admettant une dérivée généralisée.

M. Stoilow (Jassy). Sur les ensembles de mesure nulle.

M. Du Pasquier (Neuchâtel). Sur une théorie des nombres complexes.

M. Wiener (Cambridge, Mass.). One certain iterative properties of bilinear operation.

M. E. Picard (Paris). Sur les équations aux différences finies.

M. Drach (Paris). L'intégration logique des équations différentielles; applications à l'analyse.